МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МПГУ
1872

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЙ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

**Москва
2010**

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЙ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Под редакцией В.Н. Александрова

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по специальности 050502.65 - технология и предпринимательство

Москва • 2010

УДК536/537(075.8)
ББК 22.3я73-4
А465

Печатается по решению кафедры общей и экспериментальной физики МПГУ
При финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Государственный контракт №02.740.11.0228)

Авторы:
А 465 В.Н. Александров, Н.Б. Виноградова, Е.А. Коротаева

Рецензенты:
В.Ф. Банная, д.ф.-м.н., профессор (Московский государственный гуманитарный университет имени М.А. Шолохова),

Ю.Л. Хотунцев, д.ф.-м.н., профессор (МПГУ)

Сборник задач по физике с примерами решений. «Молекулярная физика и термодинамика. Электромагнетизм». Учебное пособие / В.Н. Александров, Н.Б. Виноградова, Е.А. Коротаева; Под ред. В.Н. Александрова. – М.: 2010. – 104 с.: ил.

Предназначается в качестве учебного пособия по физике (разделы «Молекулярная физика и термодинамика», «Электромагнетизм») для студентов факультета технологии и предпринимательства. Учебное пособие содержит основные формулы по данным разделам, около 300 задач, из которых 46 с решениями, вопросы для самоконтроля, а также рекомендации к решению задач.

ISBN 978-5-94101-230-6

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов

Курс физики в подготовке студентов педагогических университетов по специальностям факультета технологии и предпринимательства (ФТиП) является непрофилирующим, но играет важнейшую роль. С одной стороны, изучение физики как общеобразовательного предмета должно формировать у студентов общее представление об основных законах окружающей нас неживой природы и на этой основе современную естественно-научную картину мира. С другой стороны, знания по физике необходимы студентам для усвоения специальных технических дисциплин (теория машин и механизмов, теплотехника, электро- и радиотехника, информационные технологии и др.).

В соответствии с учебными планами этих специальностей в одних из них предусматриваются только лекционные и лабораторные занятия (2-х семестровый курс физики), в других они дополняются в одном семестре семинарами (3-х семестровый курс). Все виды аудиторных занятий проводятся по два академических часа в неделю, и углубленное освоение изучаемого материала и решение задач по физике, в основном, выносится на самостоятельную работу студентов. Для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов на семинарах в 3-х семестровом курсе обучения физике для инженерных специальностей преподаватели кафедры общей и экспериментальной физики МПГУ подготовили настоящий «Сборник задач по физике с примерами решений».

Задачи сборника распределены по 11 параграфам двух разделов курса физики («Молекулярная физика и термодинамика» и «Электромагнетизм»), изучаемых на семинарах. В каждом параграфе содержатся: список основных формул, вопросы для самоконтроля и задачи, рекомендации к решению задач и примеры решения задач. Подбор задач соответствует программе курса физики и приближен к содержанию лабораторных работ практикума. В конце сборника приведен список рекомендуемой учебной литературы.

Для организации самостоятельной работы студентов в комплекте с настоящим пособием издаются «Частные вопросы курса физики» и «Лабораторный практикум по физике» для студентов ФТиП.

Авторы благодарны заведующему КОЭФ, профессору Г.Н. Гольцману, преподавателям и сотрудникам КОЭФ за ценные рекомендации при подготовке пособия. Авторы признательны заведующему КОТД, профессору Ю.Л. Хотунцеву и другим преподавателям ФТиП за ценные замечания и доброжелательную критику при обсуждении пособия. Авторы благодарят профессора В.Ф. Банную за проделанный труд по рецензированию рукописи и высказанные замечания, которые были учтены при окончательном редактировании пособия.

Авторы благодарны профессорам МПГУ Л.В. Королевой и Н.С. Пурышевой и доцентам МПГУ С.М. Дунину и Е.Б. Петровой за проделанный труд по рецензированию рукописи и высказанные замечания, которые были учтены при окончательном редактировании пособия и подготовке рукописи к печати.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Внимательно проанализируйте условие задачи, установите величины, которые требуется определить в задаче.
2. Сделайте краткую запись условия, переведя численные значения величин, данных в условии в систему СИ, и укажите единицы их измерения.
3. Сформулируйте все упрощающие предположения, которые необходимы для решения задачи.
4. При необходимости, сделайте рисунок, поясняющий условие задачи.
5. Выявите физические явления, которые описываются в задаче и запишите физические законы (уравнения), которые их объясняют.
6. Решите полученную систему уравнений относительно искомых физических величин.
7. Проверьте полученное решение на соответствие размерности.
8. Проведите вычисления и оцените разумность полученного числового ответа. Проводя вычисления, помните, что числовые значения физических величин всегда являются приближенными и точность числового ответа не должна превышать точности величин, заданных в условии задачи.

Раздел 1.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§1. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ. ИЗОПРОЦЕССЫ

- Связь между термодинамической температурой T (по шкале Кельвина) и температурой t по Международной практической шкале (шкале Цельсия):

$$T = (t+273{,}15)K. \qquad (1.1)$$

- Нормальные условия:

$$t=0^0C;\ T_0=273{,}15\ К,\ \ P_0=1{,}013\cdot 10^5\ Па\ ,\ V_0=2{,}24\cdot 10^{-2} м^3\ , \qquad (1.2)$$

  где V_0 – объем 1-го моля идеального газа при нормальных условиях.
- Молярная масса:

$$\mu = m_0 N_A\,, \qquad (1.3)$$

  где m_0 – масса молекулы в килограммах, $N_A=6{,}022\cdot 10^{23} моль^{-1}$ – постоянная Авогадро.
- Количество молей вещества:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}\,, \qquad (1.4)$$

  где N – число молекул в данной массе газа m.
- Закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс):

$$P\,V = const,\ \ (\text{при } T = const \text{ и } m = const) \qquad (1.5)$$

  где P – давление газа, V- объем газа.
- Закон Шарля (изохорный процесс):

$$P = P_0\left[1+\alpha\left(t\text{-}t_0\right)\right] \text{ или } \frac{P}{T} = const \quad \left(при\ \ V = const,\ m = const\ \right), \qquad (1.6)$$

- Закон Гей-Люссака (изобарный процесс):

$$V = V_0\left[1+\beta\left(t\text{-}t_0\right)\right] \text{ или } \frac{V}{T} = const\left(\ при\ \ P = const,\ \ m = const\ \right), \qquad (1.7)$$

  где коэффициент $\alpha = \beta = \dfrac{1}{273{,}15^0\,C}$.
- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$PV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT\,, \qquad (1.8)$$

  где $R=8{,}31\ Дж/(моль\cdot К)$ – универсальная газовая постоянная.
- Закон Дальтона: давление смеси $P_{см}$ из $\boldsymbol{l}$ идеальных газов равно сумме парциальных давлений P_i газов, входящих в смесь:

$$P_{см} = P_1 + P_2 + \ldots + P_l = \sum_{i=1}^{l} P_i\,. \qquad (1.9)$$

✓ Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$P = nkT\ , \qquad (1.10)$$

где $n = \dfrac{N}{V}$ – концентрация молекул газа; $k = \dfrac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К* – постоянная Больцмана.

Вопросы для самоконтроля.

1. При каких условиях и допущениях газ можно рассматривать как идеальный? Приведите примеры реального газа, по своим свойствам близкого к идеальному.
2. Какими параметрами характеризуется термодинамическая система?
3. Что понимают под состоянием термодинамического равновесия системы?
4. Как принято называть соотношение, связывающее между собой значения параметров в состоянии равновесия системы?
5. Запишите уравнение состояния идеального газа для произвольной массы газа.
6. В чем смысл закона Дальтона? При каких условиях он выполняется?
7. Что называют изопроцессом? Какие вы знаете изопроцессы?
8. Изобразите графически известные Вам изопроцессы.
9. Что означает процесс выравнивания температуры в объеме газа с молекулярно-кинетической точки зрения?
10. Какие допущения делают относительно движения молекул при получении основного уравнения молекулярно-кинетической теории?

Рекомендации к решению задач

1. Выясните, какой одно- или многоатомный газ участвует в процессе, какие параметры меняются, а какие остаются постоянными.
2. Сделайте, если возможно, схематический чертеж, указав при этом, какие параметры характеризуют каждое состояние газа.
3. Особое внимание уделите параметрам, заданным неявно; иногда для нахождения объема газа нужно использовать соответствующие математические соотношения (например, для нахождения объема, если газ заключен в сосуд в форме цилиндра).
4. Для каждого состояния запишите соответствующие уравнения и решите в общем виде полученную систему уравнений относительно искомых величин.

Задачи

1.1. На рисунке 1.1 дан график изменения состояния идеального газа (при m=const) в координатах *P-V*. Представить этот круговой процесс в координатах *P-T*, обозначив соответствующие точки и объяснив построение.

Решение

Рассмотрим график процесса с учетом уравнения Клапейрона-Менделеева.

1-2. *Газ из начального состояния (т.1) изотермически ($T_1=T_2$) сжимается, а давление растет от P_1 до P_2 (т.2).*

2-3. *Затем изобарно ($P_2=P_3$) расширяется до состояния т.3. При этом температура его растет от $T_2=T_1$ до T_3.*

3-4. *Далее газ изохорно ($V_3=V_4$) переводится в состояние т.4, при этом его давление уменьшается ($P_4<P_3$), а следовательно уменьшается температура ($T_4<T_3$).*

4-1. *Цикл завершается изобарным сжатием от объема V_4 до первоначального значения, при этом температура уменьшается от T_4 до T_1.*

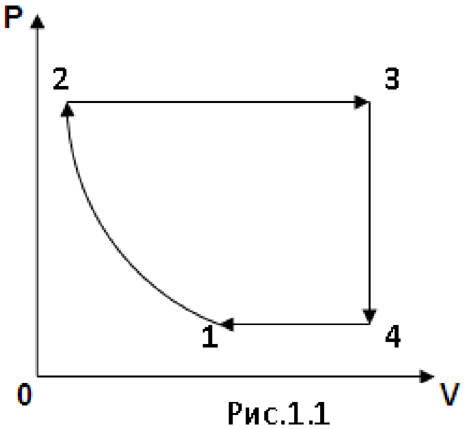


Рис.1.1

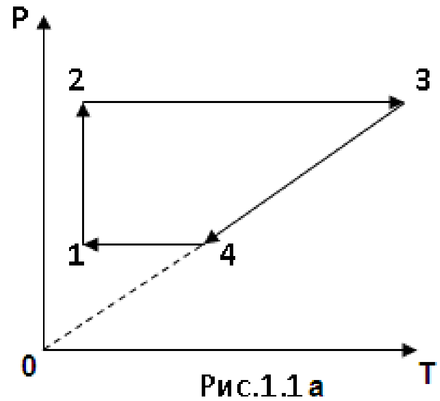


Рис.1.1а

В соответствии с изложенными рассуждениями осуществим качественный перенос исходного графика в систему координат P-T (рис.1.1а):

1-2 *– изотермическое сжатие, сопровождающееся увеличением давления;*

2-3 *– изобарное расширение, сопровождающееся ростом температуры;*

3-4 *– уменьшение давления при постоянном объеме, сопровождающееся уменьшением температуры, причем прямая изохоры должна начинаться из т.3, аппроксимироваться в начало координат и заканчиваться при $P_4=P_1$;*

4-1 *– завершение цикла происходит при $P_4=P_1$.*

1.2. На рисунке 1.1 дан график изменения состояния идеального газа ($m=const$) в координатах P-V. Представить этот круговой процесс в координатах V-T и объяснить построение.

1.3. На рис. 1.2 изображена диаграмма процессов ($m=const$) в координатах P-V. Представьте эти процессы на графиках в координатах P-T и V-T.

1.4. На плоскости в координатах P-V изобразите изобарное расширение газа от состояния «1» до состояния «2». Какому из состояний соответствует более высокая температура? Как изменится вид графика, если взять большую массу газа при том же начальном объеме?

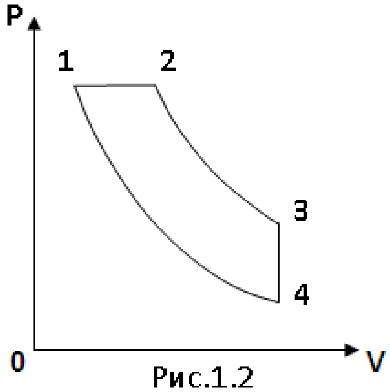


Рис.1.2

1.5. На плоскости в координатах P-V изобразите изотермическое расширение массы газа m при температуре T. Как изменится вид графика, если изотермическое расширение той же массы газа будет происходить при более высокой температуре T_1 (при более низкой температуре T_2)?

1.6. На плоскости в координатах P-V изобразите изотермическое расширение при температуре T газов, имеющих массы m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$.

1.7. Начертите графики: а) зависимости плотности газа от температуры T при постоянном давлении; б) зависимости плотности газа от давления при постоянной температуре (считать массу газа постоянной).

1.8. Некоторое количество газа из состояния 1 переводится в состояние 2 (рис. 1.3.). Как изменилось давление в этом процессе? Масса газа не меняется.

1.9. На рисунке 1.4. представлены две изохоры для газа одной и той же массы. Как относятся объемы газа, если углы наклона изохор к оси абсцисс равны α_1 и α_2, соответственно?

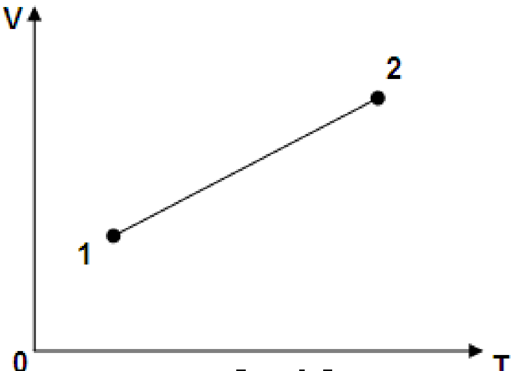


Рис.1.3

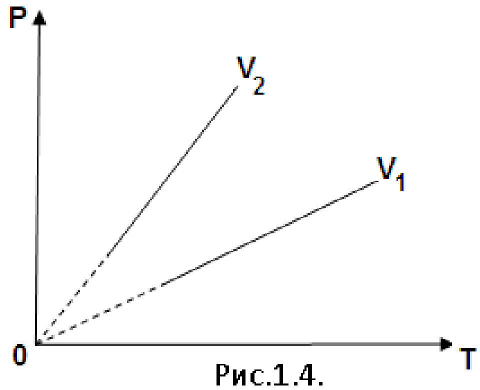


Рис.1.4.

1.10. Баллон объемом V=12л наполнен азотом при давлении P=8,1 МПа и температуре t=17^{0}С. Какая масса азота находится в баллоне? *(Ответ: m=1,13кг).*

1.11. *Азот массой m=7г при температуре T_1=290К находится под давлением P_1=0,1 МПа. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем V_2=10л. Найти:1) объем V_1 газа до расширения;2) температуру t_2 газа после расширения;3) плотности газа до и после расширения.*

Дано: $\mu=2{,}8\cdot10^{-2}$ *кг/моль;* $m=7\cdot10^{-3}$ *кг;* $P_1=10^5$*Па = const;* T_1*=290К;*
V_2*=10л=*10^{-2} *м*^{3}*;* $P_2=P_1$.

Найти: V_1; t_2; ρ_1; ρ_2.

Решение

Найдем объем газа до расширения, используя уравнение Клапейрона-Менделеева: $P_1V_1 = \dfrac{m}{\mu}RT_1$, *отсюда* $V_1 = \dfrac{mRT_1}{\mu P_1}$.

Записав уравнение Клапейрона-Менделеева для конечного состояния, найдем температуру T_2*:*

$$P_1V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2, \text{ отсюда } T_2 = \frac{P_2V_2\mu}{mR}, \text{ тогда } t_2 = T_2 - 273.$$

Плотности газа до и после расширения равны, соответственно:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2} \quad .$$

Ответ: *V_1=6,02л; t_2 =208^{0}С; ρ_1=1,16кг/м^3; ρ_2=0,7кг/м^3.*

1.12. Какое количество молей газа ν находится в баллоне объемом V=10м^3 при давлении P=96кПа и температуре t=17^{0}С? *(Ответ: ν =398 моль).*

1.13. В сосуде вместимостью V=10л находится газ массой m=35г. Концентрация n молекул газа равна 7,52·10^{25}м$^{-3}$. Определите, какой газ находится в сосуде. *(Ответ: азот).*

1.14. Масса m=12г газа занимает объем V=4л при температуре t_1=7^{0}С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной ρ=0,6кг/м^3. До какой температуры t_2 нагрели газ? *(Ответ: t_2=1127^{0}С).*

1.15. Объем баллона электрической лампы V=500 см^3 . Лампа наполнена азотом при давлении P=0,8·10^5 Па. Какой объем воды войдет в баллон лампы, если его опустить под воду на малую глубину и обломить кончик? Атмосферное давление P_0=1,05·10^{5}Па. *(Ответ: V_B=119см^3).*

1.16. Какова плотность воздуха в сосуде, емкость которого V= 2л, если сосуд откачан до P=10^{-3}мм.рт.ст., а температура воздуха t=15^{0}С? Как изменится плотность воздуха в сосуде, если добавить в него 5·10^{-8} кг воздуха? Какое давление установится в сосуде? Процесс считать изотермическим. (1 мм рт.ст.=133,3Па).
(Ответ: ρ_1=1,6·10^{-6} кг/м^3; ρ_2= 2,66·10^{-5} кг/м^3; P_2=1.65·10^{-2} мм.рт.ст.).

1.17. Тонкостенный стакан массой 40г медленно опускают в воду вверх дном таким образом, чтобы он все время оставался в вертикальном положении. Объем стакана V=200 см^3, давление у поверхности воды 10^{5}Па. Считая температуру постоянной, найдите, на какой глубине стакан начнет тонуть? *(Ответ:h=40м).*

1.18. *В сосуде вместимостью V=0,3л при температуре T=290 К находится некоторый газ. Считая температуру газа постоянной, найдите, на сколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет ΔN=10^{19} молекул?*
Дано: *T=290K;V=0,3л=3·10^{-4} м^3;ΔN=10^{19}.*
Найти: *ΔP.*

Решение

Запишем уравнения Клапейрона-Менделеева для начального (до утечки) и конечного (после утечки) состояний газа:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu}RT \quad \text{и} \quad P_2V = \frac{m_2}{\mu}RT,$$

и выразим из этих уравнений изменение давления ΔP:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{RT}{V\mu}(m_1 - m_2) = \frac{RT}{V\mu}\Delta m.$$

Так как $\nu = \dfrac{m}{\mu} = \dfrac{N}{N_A}$, *то число молей газа, вытекших из сосуда:*

$$\Delta\nu = \frac{\Delta m}{\mu} = \frac{\Delta N}{N_A}. \quad \text{Тогда} \quad \Delta P = \frac{RT}{V}\cdot\frac{\Delta N}{N_A}.$$

Учитывая, что $R=kN_A$, *получим окончательно* $\Delta P = \dfrac{kT}{V}\Delta N$.

Ответ: *133,4 Па.*

1.19. В баллоне объемом 0,2м^3 находится газ под давлением 10^5 Па при температуре 290К. После подкачивания газа давление повысилось до $3\cdot10^5$Па, а температура увеличилась до 320К. На сколько увеличилось число молекул газа? *(Ответ:* $\Delta N=8{,}6\cdot10^{24}$*).*

1.20. Сосуд содержит воздух при атмосферном давлении и температуре 20^{0}С. До какой температуры нужно нагреть этот сосуд, чтобы из него вытеснилась одна пятая часть всех молекул, первоначально находившихся в сосуде? *(Ответ:* $\approx 93^0C$*).*

1.21. Из баллона со сжатым водородом объемом V=10л вследствие неисправности вентиля вытекает газ. При температуре t_1=7^{0}С манометр показывал P=4,9·10^{6}Па. Через некоторое время при температуре t_2=17^{0}С манометр показал такое же давление. Сколько газа вытекло? *(Ответ:* $m=1{,}45\cdot10^{-3}$ *кг).*

1.22. *В сосуде объемом V=2л находятся масса* m_1*=6г углекислого газа* (CO_2) *и масса* m_2*=5г закиси азота* (N_2O) *при температуре* $t=127^0C$*. Найти давление смеси в сосуде.*

Дано: $V=2л=2\cdot10^{-3}$ *м*^{3}; $m_1=6\cdot10^{-3}$*кг*; $\mu_1=4{,}4\cdot10^{-2}$ *кг/моль*; $m_2=5\cdot10^{-3}$*кг*; $\mu_2=4{,}4\cdot10^{-2}$ *кг/моль*; $t=127^0C$; $T=400K$.

Найти: $P_{см}$.

Решение

Согласно закону Дальтона, давление смеси газов $P_{см}$ *в сосуде равно сумме парциальных давлений:* $P_{см} = P_1 + P_2$.

Из уравнения Клапейрона-Менделеева вычислим парциальные давления каждого газа:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \text{ отсюда } P_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V};$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2}RT, \text{ отсюда } P_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}.$$

Тогда давление смеси газов равно:

$$P_{см} = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) = \frac{8{,}31 \cdot 400}{2 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}}\right) = 4{,}15 \cdot 10^5\ Па.$$

Ответ: $P_{см}$*=415 кПа* **.**

1.23. В баллоне, емкость которого 20л, находится 150г смеси водорода и азота. Давление газовой смеси 10^6 Па, температура в баллоне 17^0С. Каковы массы азота и водорода в баллоне? *(Ответ:* m_{N_2} *=143,7г;* m_{H_2} *=6,3г).*

1.24. Три баллона емкостью 3, 7 и 5 дм^3 наполнены соответственно: кислородом (P_1=2·10^5 Па), азотом (P_2=3·10^5 Па) и углекислым газом (P_3=6·10^4 Па) при одной и той же температуре. Каково будет давление смеси газов, если баллоны соединить между собой? Процесс считать изотермическим. *(Ответ:* $P_{см}$ *=2·10^5Па).*

1.25. Два сосуда наполнены одним и тем же газом под давлением: P_1=4·10^5Па и P_2=9·10^5Па, и массами m_1=0,2 кг и m_2=0,3 кг. Сосуды соединяют трубкой, объемом которой можно пренебречь по сравнению с объемами сосудов. Найти установившееся давление в сосудах, если температура газа в них была одинакова $T_1=T_2$, а после установления искомого давления увеличилась на 20%. *(Ответ:* $P_{см}$ *=7,2·10^5Па).*

1.26. В сосуде находятся кислород в количестве ν_1=10^{-7} молей и азот массой m_2=10^{-6}г. Температура смеси t=100^0С, давление в сосуде P=133мПа. Найти объем V сосуда, парциальные давления кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда. *(Ответ: V=3,2л;* P_1*=97мПа;* P_2*=35мПа; n=2,6·10^{19}м$^{-3}$).*

1.27. Найти плотность газовой смеси ρ при давлении P=100 кПа и температуре T=300К, состоящей из водорода и кислорода, массы которых относятся как 1:8. *(Ответ: ρ=0,48 кг/м^3).*

§2. МОЛЕКУЛЯРНО - КИНЕТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

✓ Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 = \frac{2}{3} n \langle E_K \rangle, \qquad (2.1а)$$

где n – концентрация молекул; $\langle E_K \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы; m_0 – масса молекулы; $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул

или $$PV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E_\Sigma, \qquad (2.1б)$$

где $N=nV$ – число молекул в объеме газа V; $E_\Sigma = N \cdot \langle E_K \rangle$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

- ✓ Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы:

$$\langle E_K \rangle = \frac{m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \ . \qquad (2.2)$$

- ✓ Средняя квадратичная скорость молекул:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \qquad (2.3)$$

- ✓ Барометрическая формула:

$$P = P_0 \, exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT} \right), \qquad (2.4)$$

где P *и* P_0 – давление газа на высотах h и $h=0$ соответственно; g=9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения; m_0 – масса молекулы.

- ✓ Распределение Больцмана в гравитационном поле Земли:

$$n = n_0 \, exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT} \right), \qquad (2.5)$$

где n и n_0 – концентрация молекул на высотах h и h_0 , соответственно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие допущения делаются относительно движения молекул газа при расчете давления идеального газа?
2. От каких величин зависит средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа?
3. Какие допущения делаются при выводе барометрической формулы? Что показывает барометрическая формула?
4. Как изменяется средняя кинетическая энергия молекул в разных слоях газа, находящихся в равновесии, с увеличением высоты над поверхностью Земли?
5. Приведите примеры применения распределения Больцмана.
6. Как связаны средняя квадратичная скорость молекул газа и его плотность?

Задачи

2.1 *В сосуде объемом V=2л находится масса m=10г кислорода при давлении P=90,6кПа. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, концентрацию молекул и число молекул N, находящихся в сосуде.*

Дано: *V=2л=2·10^{-3}м^3; m=10г=10^{-2}кг; P=90,6кПа=9,06·10^{4}Па;*

μ=32·10^{-3} кг/моль.

Найти: $\langle \upsilon_{кв} \rangle$; *n; N.*

Решение

В задаче даны четыре макропараметра идеального газа V, m, P и μ, а нужно найти два макропараметра N и n и один микропараметр

$\langle \upsilon_{кв} \rangle$. Поэтому запишем уравнения, определяющие N (1.4) и n (1.10), а также основное уравнение молекулярно-кинетической теории (2.1а):

$$N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{\mu} N_A \;, \qquad (1)$$

$$n = \frac{N}{V} \;, \qquad (2)$$

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 \;. \qquad (3)$$

Из (1) найдем N: $\quad N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}88 \cdot 10^{23}.$

Из (2) определим n: $\quad n = \frac{N}{V} = \frac{1{,}88 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-3}} = 9{,}4 \cdot 10^{25}\, м^{-3}.$

Для нахождения средней квадратичной скорости $\langle \upsilon_{кв} \rangle$, умножим (3) на объем V и получим:

$$PV = \frac{1}{3} n V m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3} N m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 .$$

Отсюда $\quad \langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3PV}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}06 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}} = 233 м/с.$

Ответ: *$\langle \upsilon_{кв} \rangle$=233м/с; $n=9{,}4\cdot10^{25}м^{-3}$; $N=1{,}88\cdot10^{23}$.*

2.2 Средняя энергия поступательного движения молекул газа в сосуде вместимостью V=0,5л равна 75 Дж. Определите давление газа. *(Ответ: 100 кПа).*

2.3 Кислород находится при температуре 47^{0}С. Определите: 1) кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы; 2) среднюю квадратичную скорость молекул. *(Ответ: $6{,}62\cdot10^{-21}$Дж; 499 м/с).*

2.4 Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна 0,01 кг/м^3, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с. *(Ответ: 768 Па).*

2.5 Частицы гуммигута диаметром d=1мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута ρ=10^{3}кг/м^3. Найти среднюю квадратичную скорость частиц гуммигута при температуре t=0^{0}С. *(Ответ: 4,7 мм/с).*

2.6 Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа? *(Ответ: $2{,}04\cdot10^{22}$).*

2.7 Некоторый газ при давлении P=100 кПа и температуре t=17^{0}С имеет плотность ρ =0,083кг/м^3. Найти среднеквадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекул газа. Какой это газ? *(Ответ: 1900 м/с).*

2.8 *В 1906 г. французский физики Ж.Перрен, наблюдая под микроскопом изменение концентрации взвешенных в воде мельчайших частиц эмульсии смолы гуммигута с изменением высоты и применив к ним барометрическую формулу, экспериментально определил постоянную Авогадро. Используя идею установки Перрена, и применив к частицам краски, взвешенным в воде, распределение Больцмана, найдите объем частиц, если при расстоянии между двумя слоями h=80мкм число взвешенных частиц в одном слое втрое больше, чем в другом. Плотность растворенной краски 1700 кг/м^3, температура окружающей среды 27^{0}С.*

Дано: *Δh=80мкм=$8\cdot10^{-5}$м; T=300K; $\rho_{кр}=1{,}7\cdot10^3$кг/м^3; $n_1/n_2=3$.*
Найти: *V.*

Решение

Вес броуновской частицы в воде равен:

$$P = m_0 g - F_A = V\rho_{кр} g - V\rho_{ж} g = Vg\Delta\rho\,, \qquad (1)$$

где m_0 – масса частицы, V– объем частицы, $\rho_ж$ – плотность воды.

Применим распределение Больцмана (2.5) для определения концентрации броуновских частиц на высотах h_1 и h_2 :

$$n_1 = n_0\, exp\left(-\frac{P}{kT}h_1\right) \text{ и } n_2 = n_0\, exp\left(-\frac{P}{kT}h_2\right),$$

где n_0, n_1 и n_2 – соответственно концентрации молекул на высоте h_0, h_1 и h_2.

Тогда $\dfrac{n_1}{n_2} = exp\left(\dfrac{P}{kT}\Delta h\right)$.

Прологарифмировав это выражение, получим:

$$ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{P}{kT}\Delta h. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

$$V = \frac{ln\dfrac{n_1}{n_2}\cdot kT}{g\cdot\Delta h\cdot\left(\rho_{кр}-\rho_{ж}\right)} = \frac{ln3\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300}{9{,}8\cdot8\cdot10^{-5}\left(1{,}7-1\right)\cdot10^3} = 8{,}28\cdot10^{-21}\,м^3.$$

Ответ: *V=$8{,}28\cdot10^{-21}$м^3.*

2.9 Считая, что воздух на поверхности Земли находится при нормальных условиях, определите отношение давления воздуха на высоте 2км к давлению на дне шахты глубиной 2км. Считайте, что температура воздуха от высоты не зависит. *(Ответ: 0,6).*

2.10 На какой высоте плотность воздуха в *e* раз меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считать не зависящими от высоты. *(Ответ: 7,98 км).*

2.11 Пассажирский самолет совершает полеты на высоте 8300м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабине при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте 2700 м. Найдите разность давлений внутри и снаружи кабины. Среднюю температуру наружного воздуха считать равной 0^0С. Давление у поверхности Земли равно 10^5Па. *(Ответ: $\Delta P=3{,}6\cdot 10^4$Па).*

2.12 Определите вес цилиндрического столба воздуха, площадь основания которого равна S=1м^2, а высота равна высоте Останкинской телебашни (h=530м). Считайте, что температура воздуха t=27^{0}С, давление у поверхности Земли P_0=10^5Па. *(Ответ: $F_T=6\cdot 10^3$Н).*

§3. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА: ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, ДИФФУЗИЯ, ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ

✓ Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1с:

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle \upsilon\rangle \qquad (3.1)$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя (по модулю) скорость молекул, где k – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы.

✓ Средняя длина свободного пробега молекул газа:

$$\langle \lambda\rangle = \frac{\langle \upsilon\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \qquad (3.2)$$

✓ Масса, перенесенная за время Δt через площадку ΔS при диффузии (закон Фика):

$$m = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t, \qquad (3.3)$$

где $\Delta\rho/\Delta x$ – градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке ΔS; $D = \frac{1}{3}\langle \lambda\rangle\langle \upsilon\rangle$- коэффициент диффузии. Знак «–» означает, что перенос массы осуществляется в направлении убывания плотности переносимого вещества.

✓ Количество теплоты, перенесенное за время Δt через площадку ΔS вследствие теплопроводности (закон Фурье):

$$Q = -\chi\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S\Delta t, \qquad (3.4)$$

где $\Delta T/\Delta x$ – градиент температуры в направлении, перпендикулярном к площадке ΔS; $\chi = \dfrac{\langle \lambda\rangle\langle \upsilon\rangle\, c_V\rho}{3}$ – коэффициент теплопроводности; c_V – удельная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа. Знак «–» показывает, что перенос теплоты происходит в направлении убывания температуры.

- ✓ Сила внутреннего трения, действующая между слоями газа (закон Ньютона):

$$F_{ТР} = -\eta \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \Delta S, \tag{3.5}$$

где $\Delta\upsilon/\Delta x$ – градиент скорости течения газа в направлении, перпендикулярном к площадке ΔS слоев газа, между которыми действует сила внутреннего трения; $\eta = \frac{\langle\lambda\rangle\langle\upsilon\rangle\rho}{3}$ – динамическая вязкость газа (или коэффициент внутреннего трения). Знак «–» означает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

- ✓ Связь между коэффициентами теплопроводности χ, диффузии D и динамической вязкостью η:

$$\eta = \rho D \tag{3.6а}$$

и

$$\frac{\chi}{\eta c_V} = 1. \tag{3.6б}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют средней длиной свободного пробега молекул? От каких параметров она зависит? Каков порядок $\langle\lambda\rangle$ для N_2 при атмосферном давлении?
2. Что понимают под эффективным диаметром молекул?
3. Как понимать термин «столкновения» молекул?
4. Что понимают под явлениями переноса в газах? Какие явления к ним относятся? Что общего во всех этих процессах?
5. Чем объяснить, что все явления переноса протекают медленно, хотя все они происходят благодаря тепловому движению молекул?
6. Каков механизм явлений диффузии, внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности газов?
7. Почему в законах явлений переноса ставят знак «минус»?
8. Каков физический смысл градиента температуры, градиента скорости и градиента плотности?
9. Каков физический смысл коэффициентов диффузии, внутреннего трения и теплопроводности? От каких параметров состояния газа зависит каждый из них?
10. Какой смысл вкладывают в понятия «низкое» и «высокое» давления?
11. Дайте определение вакуума. Какие виды вакуума принято различать? Что такое вакуум с точки зрения длины свободного пробега? Будут ли происходить явления переноса в вакууме?
12. Для чего в термосах и сосудах Дьюара делают двойные стенки?

Задачи

3.1. *Чему равна средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул азота при давлении P=1Па и температуре T=300К? Эффективный диаметр молекулы азота d=0,36 нм.*

Дано: *P=1Па; T=300К; d=0,36нм=$3{,}6\cdot10^{-10}$м.*

Найти: $\langle\lambda\rangle$

Решение

Для решения задачи запишем уравнение (3.2) для средней длины свободного пробега молекулы газа и (1.10) для давления газа:

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

$$P=nkT. \qquad (2)$$

Выразив из (2) концентрацию молекул n и подставив ее в (1), окончательно получим:

$$\langle\lambda\rangle=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}=\frac{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300}{\sqrt{2}\cdot3{,}14\cdot(3{,}6)^2\cdot10^{-20}\cdot1}=7{,}22\cdot10^{-3}\text{ м}.$$

Ответ: *$\langle\lambda\rangle=7{,}22\cdot10^{-3}$ м.*

3.2. Давление газа увеличилось в два раза. Как изменилась при этом средняя длина свободного пробега молекул, если а) температура осталась без изменения; б) температура увеличилась в два раза? *(Ответ: а) $\langle\lambda_2\rangle/\langle\lambda_1\rangle=0{,}5$; б) $\langle\lambda_1\rangle=\langle\lambda_2\rangle$).*

3.3. Баллон емкостью V=10л содержит m=1г водорода. Определите среднюю длину свободного пробега молекул, если диаметр молекулы водорода d=$2{,}3\cdot10^{-10}$м. *(Ответ: $1{,}41\cdot10^{-7}$м).*

3.4. При некоторых условиях средняя длина свободного пробега молекул газа равна 160 нм, а средняя скорость равна 1,95 км/с. Найти среднее число столкновений в единицу времени молекул этого газа, если при той же температуре давление газа уменьшить в 1,27 раз. *(Ответ: $9{,}6\cdot10^{9}$ $с^{-1}$).*

3.5. Сосуд с воздухом откачан до давления P=$1{,}33\cdot10^{-4}$ Па. Найти плотность воздуха в сосуде, число молекул n в единице объема сосуда и среднюю длину свободного пробега молекул. Диаметр молекул воздуха d=0,3нм. Молярная масса воздуха μ=$2{,}9\cdot10^{-2}$кг/моль. Температура воздуха t=17^0С. *(Ответ: $\rho=1{,}6\cdot10^{-9}$ кг/м^3; n=$3{,}3\cdot10^{16}$ м$^{-3}$; $\langle\lambda\rangle$=75,3 м).*

3.6. *Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку S=0,01м^2 за время t=10с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, $\Delta\rho/\Delta x$=1,26 кг/м^4. Температура азота t=27^{0}С. Средняя длина свободного пробега молекул азота $\langle\lambda\rangle$=10мкм.*

Дано: *S=10^{-2} м^2; t=10с; T=300К; $\Delta\rho/\Delta x$=1,26 кг/м^4;*

$\langle\lambda\rangle$=10мкм=10^{-5}м; $\mu=2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: *m.*

Решение

Масса вещества, перенесенная в результате диффузии через площадку S за время t (см. (3.3)):

$$m = \left| D\frac{d\rho}{dx}St \right|, \qquad (1)$$

где коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle$. *(2)*

Средняя скорость молекул газа: $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. *(3)*

Подставив (3) в (2), а затем (2) в (1), получим формулу для вычисления массы азота:

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\langle \lambda \rangle \frac{d\rho}{dx}St = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 300}{3{,}14\cdot 28\cdot 10^{-3}}}\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}26\cdot 10^{-2}\cdot 10 = 2\cdot 10^{-4}\,кг.$$

Ответ: *$m=2\cdot 10^{-4}$ кг.*

3.7. Найти коэффициент диффузии D и вязкость воздуха η при давлении P=101,3 кПа и температуре t=10^{0}С. Эффективный диаметр молекулы воздуха 0,3нм. *(Ответ: $D=1{,}46\cdot 10^{-5}$ м^2/с; $\eta=1{,}82\cdot 10^{-5}$ Па·с).*

3.8. Определите, во сколько раз вязкость кислорода больше вязкости азота, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении? Эффективные диаметры молекул этих газов считать равными. *(Ответ: в 1,07 раза).*

3.9. Найти теплопроводность воздуха при давлении P=100кПа и температуре t=10^{0}С. Эффективный диаметр молекул воздуха d=0,3нм. *(Ответ: 13,2 мВт/(м·К)).*

3.10. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях $\langle\lambda\rangle$=1,8х10^{-7}м. Определите коэффициенты диффузии, внутреннего трения и теплопроводности. *(Ответ: $D=7{,}2\cdot 10^{-5}$м^2/с; $\eta=1{,}27\cdot 10^{-5}$Н·с·м$^{-2}$; $\chi=3{,}96\cdot 10^{-2}$Вт/(м·К)).*

3.11. Самолет летит со скоростью v=360км/ч. Считая, что толщина слоя воздуха у крыла самолета, увлекаемого вследствие вязкости, a=4см, найти касательную силу $F_{тр}$, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул воздуха d=0,3нм. Температура воздуха t=0^{0}С. *(Ответ: $F_{тр}=4{,}5\cdot 10^{-2}$ Н/м^2).*

3.12. Какое количество теплоты Q теряет помещение за время t = 1ч через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы S = 4м^2, расстояние между ними a = 30см. Температура помещения t_1 = 18^{0}С, температура наружного воздуха t_2 = -20^{0}С. Диаметр молекул воздуха d=0,3нм. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление P=101,3 кПа. *(Ответ: Q=23,3 кДж).*

3.13. Можно ли считать вакуум при давлении P=100 мкПа высоким, если он создан в колбе диаметром d=20см, содержащей азот при температуре T=280К? Эффективный диаметр молекулы азота d=0,38 нм. *(Ответ: можно, так как длина свободного пробега* $\langle\lambda\rangle$*=60,3м, много больше диаметра колбы).*

§4. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

✓ Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на 1 степень свободы молекулы:

$$\left\langle E_K^1 \right\rangle = \frac{\left\langle E_K \right\rangle}{3} = \frac{1}{2}kT. \qquad (4.1)$$

✓ Средняя энергия одной молекулы: $\left\langle E_K \right\rangle = \frac{i}{2}kT$, (4.2)

где i – число степеней свободы.

✓ Внутренняя энергия:

– произвольной массы газа $U = \frac{i}{2}NkT = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$; (4.3а)

–1 моля газа $U = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT$. (4.3б)

✓ Первое начало термодинамики:

$$dQ = dU + dA, \qquad (4.4)$$

где dU – малое изменение внутренней энергии системы; dA – элементарная работа; dQ – малое количество теплоты.

✓ Молярная теплоемкость: $C = \frac{dQ}{\nu dT}$, (4.5)

где ν – число молей идеального газа.

✓ Удельная теплоемкость: $c = \frac{dQ}{mdT}$. (4.6)

✓ Связь между молярной и удельной теплоемкостями газа:

$$C = c\mu, \qquad (4.7)$$

где μ – молярная масса газа.

✓ Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad (4.8)$$

где i – число степеней свободы (i=3, 5, 6 для молекул, состоящих соответственно из одного, двух, трех и более атомов).

✓ Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении:

$$C_P = \frac{i+2}{2}R. \qquad (4.9)$$

- ✓ Уравнение Майера:

$$C_P = C_V + R. \qquad (4.10)$$

- ✓ Изменение внутренней энергии идеального газа:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT\,. \qquad (4.11)$$

- ✓ Элементарная работа газа при изменении его объема:

$$dA = PdV. \qquad (4.12)$$

- ✓ Полная работа при изменении объема газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV, \qquad (4.13)$$

где V_1 и V_2 – конечный и начальный объемы газа.

- ✓ Работа газа:

– при изобарном процессе $A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$ (4.14а)

– при изотермическом процессе $A = \frac{m}{\mu} RT\, ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT\, ln \frac{P_1}{P_2}$. (4.14б)

- ✓ Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$PV^{\gamma} = const; \quad TV^{\gamma - 1} = const; \quad T^{\gamma} P^{1-\gamma} = const, \qquad (4.15)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

- ✓ Работа газа при адиабатном процессе: $A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2),$ (4.16а)

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] == \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \qquad (4.16б)$$

где T_1 и T_2 – начальная и конечная температуры газа, V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

- ✓ Уравнение политропного процесса: $PV^n = const,$ (4.17)

где $n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$ – показатель политропы.

- ✓ Уравнение теплового баланса: $Q = \sum_{к=1}^{n} \Delta U_к,$ (4.18)

где Q – количество теплоты, которые данные тела получили или отдали в процессе теплообмена; ΔU – изменение внутренней энергии i-го тела в процессе теплообмена; n –число тел, участвующих в теплообмене.

- ✓ Изменение внутренней энергии при нагревании или охлаждении:

$$\Delta U = c\,m\,\Delta T\,, \tag{4.19}$$

где c – удельная теплоемкость, m – масса тела, ΔT – изменение температуры.

- ✓ Изменение внутренней энергии при плавлении или затвердевании:

$$\Delta U = \lambda m\,, \tag{4.20}$$

где λ – удельная теплота плавления.

- ✓ Изменение внутренней энергии при парообразовании или конденсации:

$$\Delta U = rm\,, \tag{4.21}$$

где r – удельная теплота парообразования.

- ✓ Выделение внутренней энергии при сгорании вещества:

$$\Delta U = qm\,, \tag{4.22}$$

где q – удельная теплотворная способность вещества (топлива).

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под внутренней энергией системы? От каких величин она зависит? Укажите пути изменения внутренней энергии.
2. Что понимают под «числом степеней свободы» газа? От чего зависит это число? Чему оно равно для одноатомного, двухатомного и многоатомного газа?
3. Запишите первое начало термодинамики для изохорного, изотермического, изобарного и адиабатного процессов?
4. В каких случаях изменение внутренней энергии системы равно количеству теплоты, подведенному к системе?
5. В каких случаях изменение внутренней энергии системы равно внешней работе, совершенной над системой?
6. Что называют теплоемкостью системы?
7. Что понимают под теплоемкостью вещества – удельной, молярной? Назовите единицы их измерения.
8. Какова связь между удельной и молярной теплоемкостями.
9. Почему $C_p > C_V$ для идеального газа?
10. Какой процесс называют адиабатным? Приведите примеры таких процессов.
11. Чему равна теплоемкость системы при изотермическом и адиабатном процессах?
12. Как зависит γ от числа степеней свободы i молекул газа?
13. Каков физический смысл R?

Рекомендации к решению задач

1. Определите тип процесса, выберите соответствующие выражения для теплоемкостей и работы.
2. При вычислении изменения внутренней энергии идеального газа в заданном процессе определите число молей газа, изменение температуры, учтите число степеней свободы данного газа.

3. Для нахождения недостающих параметров (P, V, T, m) воспользуйтесь уравнением Клапейрона-Менделеева.

Задачи

4.1 Азот массой 1 кг находится при температуре 7^0C. Найти 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы азота; 2) Среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота; 3) Внутреннюю энергию данной массы азота; 4) Какая часть энергии данной массы газа приходится на долю поступательного движения молекул, а какая – на долю вращательного? Газ считать идеальным. *(Ответ: 1) $9{,}7\cdot10^{-21}$Дж; 2) 83,1 кДж; 3) 207,8 кДж; 4) 60% и 40%).*

4.2 *1 грамм кислорода (O_2) нагревается от T_1=283 К до T_2=333К различными способами: а) при P=const; б) при V=const; в) при ΔQ=0. Газ считать идеальным. Определить изменение внутренней энергии кислорода при его нагревании от T_1 до T_2. Проверить для указанных процессов теоретическое положение о том, что изменение внутренней энергии идеального газа не зависит от процесса перехода, а зависит только от начальной и конечной температуры.*

Дано: $m=10^{-3}$*кг*; $\mu=3{,}2\cdot10^{-2}$ *кг/моль*; $i=5$; T_1=283 *К*; T_2=333*К*.

Найти: ΔU_p, ΔU_V, $\Delta U_{ад}$.

Решение

а) Пусть процесс перехода газа из состояния с T_1 в состояние с T_2 происходит по изобаре (P=const).

По первому началу термодинамики:

$$\Delta U_P = \Delta Q - \Delta A. \qquad (1)$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания на ΔT при P=const количества вещества $\nu=m/\mu$, равно:

$$\Delta Q = \nu \cdot C_P \cdot \Delta T. \qquad (2)$$

Работа газа:

$$\Delta A = P \cdot \Delta V. \qquad (3)$$

Используем уравнение Клапейрона-Менделеева для определения изменения объема и температуры:

$$P \cdot \Delta V = \nu \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), а (3) и (2) в (1), а также используя уравнение Майера, получим:

$$\Delta U_P = \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1). \qquad (5)$$

б) Нагревание газа ведется по изохоре (V=const). В этом случае совершаемая газом работа ΔA=0 и $\Delta U_V=\Delta Q$. Количество теплоты, необходимое для нагревания на ΔT при V=const количества вещества $\nu = m/\mu$, равно:

$$\Delta Q = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T. \qquad (6)$$

Отсюда получим:

$$\Delta U_V = \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1). \qquad (7)$$

в) Нагревание газа от T_1 до T_2 производится адиабатно. В этом случае $\Delta Q=0$ и $\Delta U_{ад}=-\Delta A$. В адиабатном процессе:

$$\Delta U_{ад} = -\Delta A = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T = \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1). \qquad (8)$$

Хотя в адиабатном процессе система тепловой энергии не получает, увеличение температуры газа происходит за счет его сжатия внешними силами. Выражения (5), (7) и (8) идентичны, что подтверждает, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от процесса перехода.

$$\Delta U = \left(\frac{10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 50 = 32{,}5 \, Дж.$$

Ответ: *$\Delta U=32{,}5$ Дж.*

4.3 Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях ρ=1,43кг/м^3. Найти удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа. *(Ответ: c_V=648 Дж/кг·К; c_p=908 Дж/кг·К).*

4.4 Найти удельную теплоемкость c_p газовой смеси, состоящей из ν_1=3кмоль аргона и количества ν_2=2 кмоль азота. *(Ответ: c_p=684 Дж/кг·К).*

4.5 Найти внутреннюю энергию U двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом V=2л под давлением P=150кПа. *(Ответ: U=750Дж).*

4.6 В закрытом сосуде находится смесь азота (m_1=56г) и кислорода (m_2=64г). Определить изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на 20^{0}С. *(Ответ: 1,66 кДж).*

4.7 Какая часть количества теплоты, подводимой к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа и какая часть – на работу, совершаемую газом при расширении, если газ а) одноатомный, б) двухатомный в) многоатомный? *(Ответ: а)0,6; 0,4; б) 0,71; 0,28; в)0,75; 0,25).*

4.8 В закрытом сосуде находится масса m=14г азота при давлении P_1=0,1МПа и температуре t_1=27^{0}С. После нагревания давление в сосуде повысилось в 5 раз. До какой температуры t_2 был нагрет газ? Найти объем сосуда V и количество теплоты Q, сообщенное газу. *(Ответ: t_2=1227^{0}С ; V=12,5л; Q=12,46 кДж).*

4.9 На нагревание массы m=40г кислорода от температуры t_1=16^{0}С до t_2=40^{0}С затрачено количество теплоты Q=623Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)? *(Ответ: при V=const).*

4.10 Какую массу m углекислого газа можно нагреть при P= const от температуры t_1=20^{0}С до t_2=100^{0}С количеством теплоты Q=222Дж? Определите изменение средней кинетической энергии одной молекулы? *(Ответ: $m=3{,}67\cdot10^{-3}$кг; $\varepsilon_i=3{,}3\cdot10^{-21}$Дж).*

4.11 Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре T= 300К под давлением P_1=0,5МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Газ совершает работу A= -432 кДж. Определите, какой это газ. *(Ответ: гелий).*

4.12 *Двухатомный газ первоначально имеет объем 50л и его давление равно $P_1=3\cdot 10^5$Па. Газ нагревают изохорно до тех пор, пока давление не удвоится. После этого газ изотермически расширяют до первоначального давления. А затем изобарно охлаждают до первоначального объема. Определите в каждом процессе: а) работу, производимую газом; б) изменение его внутренней энергии; в) количество теплоты, получаемой (отдаваемой) газом. Постройте график процесса.*

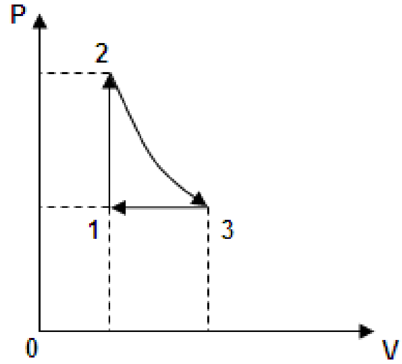


Рис.4.12

Дано: $V_1=50л=5\cdot 10^{-2}м^3$; $P_1=3\cdot 10^5Па$;
V_1 =const; $P_2/P_1=2$; T_2 =const;
$P_3=P_1$; P_3=const.

Найти: A_V; A_T;A_P;ΔU_V; ΔU_T; ΔU_P;
Q_V; Q_T; Q_P.

Решение

Построим график процесса (рис.4.12). Газ проходит через три состояния со следующими макропараметрами:

$$P_1,V_1,T_1 \Rightarrow P_2,V_1,T_2 \Rightarrow P_3,V_3,T_2 \Rightarrow P_1,V_1,T_1.$$

1) Из уравнения Клапейрона-Менделеева (1.8) с учетом начальных условий получим выражение для температуры T_1:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R}. \qquad (1)$$

2) Применив для перехода 1⇨ 2 закон Шарля (1.6) и учтя условие задачи, выразим T_2:

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1}\cdot T_1 = 2T_1. \qquad (2)$$

Так как при изохорном нагревании работа A_V=0, то все сообщенное газу количество теплоты идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\Delta Q_V = \Delta U_V.$$

С учетом (1.8) и (2) получим:

$$\Delta U_V = \nu\cdot C_V\cdot \Delta T = \nu\cdot\frac{i}{2}R\cdot(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\cdot P_1\cdot V_1 = \frac{5}{2}\cdot 3\cdot 10^5\cdot 5\cdot 10^{-2} = 3{,}75\cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

3) Переход 2⇨ 3 осуществляется при T_2=const, следовательно изменение внутренней энергии газа ΔU_T =0. Все переданное газу количество теплоты расходуется на совершение работы: $\Delta Q_T = A_T$.

Подставив в формулу (4.13) выражение для давления из формулы (1.8) и проинтегрировав по объему от V_1 до V_3 ,получим:

$$A_T = \int_{V_1}^{V_3} \nu R T_2 \cdot \frac{dV}{V} = \nu R T_2 \cdot \ln\frac{V_3}{V_1}. \qquad (3)$$

Применив уравнение (1.8) для состояний 1 и 3:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_2} \qquad (4)$$

и учтя, что $P_3=P_1$ и (2), получим $V_3=2V_1$ и окончательное выражение для работы:

$$A_T = \nu R T_2 \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} = P_1 \cdot V_1 \cdot \ln 2 = 3\cdot 10^5 \cdot 5\cdot 10^{-2} \cdot 0{,}693 = 1{,}04\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

4) Для количества теплоты, отдаваемой газом при изобарном сжатии 3⇨1, и работы, совершенной над газом, с учетом выражений (2), (4), (4.9) и (4.10) получим:

$$\Delta Q_P = \nu \cdot C_P \cdot (T_1 - T_2) = \Delta U_V + A_P = -\frac{i+2}{2} P_1 V_1 = -3\cdot 10^5 \cdot 5\cdot 10^{-2} \cdot \frac{7}{2} = -5{,}25\cdot 10^4 \text{ Дж}$$

$$A_P = P_1 \cdot (V_1 - V_3) = -P_1 \cdot V_1 = -1{,}5\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Ответ: *1) $A_V=0$; $Q_V = \Delta U_V = 3{,}75\cdot 10^4$ Дж; 2) $\Delta U_T=0$; $Q_T=A_T=1{,}04\cdot 10^4$ Дж;*

3) $A_P=-1{,}5\cdot 10^4$ Дж; $Q_P=-5{,}25\cdot 10^4$ Дж; $\Delta U_P=-3{,}75\cdot 10^4$ Дж.

4.13 В сосуде под поршнем находится масса газа m=1г азота. Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на ΔT=10К? На какую высоту Δh при этом поднимется поршень? Масса поршня M=1кг, площадь его поперечного сечения S=10см^2. Давление над поршнем P=100кПа. *(Ответ:10,4 Дж;2,7·10^{-2}м).*

4.14 Азот массой 50г находится при температуре T_1=280К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в n=2 раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равной первоначальной. Определить:1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа. *(Ответ: 1) 2,08 кДж; 2) 0).*

4.15 *В четырехтактном двигателе дизеля засосанный атмосферный воздух в объеме 10л подвергается 12-кратному сжатию. Начальное давление - атмосферное, начальная температура 10^{0}С. Процесс сжатия адиабатный, газ идеальный. Определить конечное давление, конечную температуру и работу сжатия.*

Дано: *$V_1 = 10^{-2}$м^3; $V_1/V_2=12$; $P_1=10^5$Па; $T_1=283$К; $Q=0$; $\mu=2{,}9\cdot 10^{-2}$ кг/моль.*

Найти: *P_2, T_2, A.*

Решение

Из уравнения адиабаты $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$ определим конечное давление P_2:

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 10^5 \cdot 12^{1,4} = 3{,}24 \cdot 10^6\ Па. \qquad (1)$$

Из уравнения адиабаты $T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$ *определим* T_2*:*

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 283 \cdot 12^{0,4} = 764{,}6К. \qquad (2)$$

Допуская, что воздух состоит в основном из кислорода (O_2) и азота (N_2), можно считать его двухатомным газом с теплоемкостью $C_V=(5/2)R$.

Подставив (2) в (4.16а), и определив массу воздуха в двигателе из уравнения Клапейрона-Менделеева (1.8), получим выражение для работы при адиабатном сжатии:

$$A = \frac{5}{2}\cdot P_1V_1\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

$$A = \frac{5}{2}\cdot 10^5 \cdot 10^{-2}\left(1-12^{0,4}\right) = -4{,}25 \cdot 10^3\ Дж.$$

Ответ: $P_2 = 3{,}24\cdot 10^6$ *Па;* $T_2=765К$ *или* $t_2=492^0C$; $A=-4{,}25\cdot 10^3$*Дж.*

4.16 До какой температуры t_2 охладится воздух, находящийся при температуре $t_1=0^0$С, если он расширяется адиабатно от объема V_1 до $V_2=2V_1$? *(Ответ:* $t_2=-66{,}1^0C$*).*

4.17 Два различных газа, из которых один - одноатомный, а другой - двухатомный, имеют одинаковую температуру и занимают одинаковый объем. Газы сжимают адиабатно так, что их объем уменьшается в два раза. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз? *(Ответ: одноатомный газ нагреется больше в 1,2 раза).*

4.18 *Двухатомный идеальный газ занимает объем* $V_1=0{,}5л$ *при давлении* $P_1=50кПа$*. Газ сжимается адиабатно до некоторого объема* V_2 *и давления* P_2*. Затем он изохорно охлаждается до первоначальной температуры, причем его давление становится равным* $P_3=100$ *кПа. Определить: 1) объем* V_2 *2) давление* P_2 *. Начертить график этих процессов.*

Дано: $V_1=0{,}5л=5\cdot 10^{-4}м^3$; $P_1=5\cdot 10^4Па$; $i=5$; $\gamma=1{,}4$; $P_3=10^5Па$.

Найти: V_2, P_2.

Решение

Газ проходит через три состояния со следующими макропараметрами: $P_1,V_1,T_1 \Rightarrow P_2,V_2,T_2 \Rightarrow P_3,V_2,T_1$.

1. Используем для нахождения V_2 *уравнение Клапейрона-Менделеева для состояния 1 и 3:* $P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ *и* $P_3V_2 = \frac{m}{\mu}RT_1$.

Из них получим, что $V_2 = \dfrac{P_1}{P_3} V_1$. *Вычислим* V_2*:* $V_2=2{,}5\cdot 10^{-4}$*м*^{3}*=0,25л.*

2. Для нахождения давления P_2 *воспользуемся уравнением адиабаты:* $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$. *Отсюда*

$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma}.$$

Вычислим P_2*:* $P_2=1{,}32\cdot 10^5$*Па.*

3. Построим график процесса (рис.4.18).

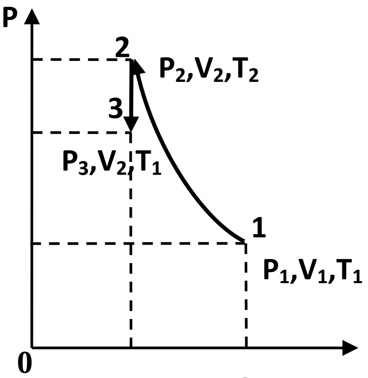


Рис.4.18

Ответ: V_2*=0,25л;* P_2*=132 кПа.*

4.19 Идеальный газ расширяется от объема V_1 до объема V_2 один раз адиабатно, другой раз изотермически. На плоскости *P-V* изобразите графически эти процессы. В чем их различие? В каком случае газ совершает большую работу?

4.20 Масса m=28г азота, находящегося при температуре t_1=40^{0}С и давлении P_1=100кПа, сжимается до объема V_2=13л. Найти температуру t_2 и давление P_2 азота после сжатия, если азот сжимается а) изотермически б) адиабатически. Найти работу газа в каждом из этих случаев. *(Ответ: 1)* $t_1=t_2=40^0$*С;*P_2*=200 кПа; А=-1,8кДж; 2)* $t_2=140^0$*С;* P_2*=264 кПа; А= -2,1кДж).*

4.21 Кислород, занимающий при давлении P_1=1МПа объем V_1=5л, расширяется в *n*=3 раза. Определить конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотреть следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатный. *(Ответ: 1) 1 МПа; 10 кДж; 2) 0,33МПа; 5,5 кДж; 3) 0,21 МПа; 4,4 кДж).*

§5. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕПЛОВЫЕ И ХОЛОДИЛЬНЫЕ МАШИНЫ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

✓ Коэффициент полезного действия (КПД) для кругового процесса (цикла) тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{5.1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой; *А*–работа, совершаемая за цикл.

✓ КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{5.2}$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

- ✓ Второе начало термодинамики – изменение энтропии S в макросистемах больше или равно изменению приведенной теплоты $\frac{Q}{T}$ для неравновесных и равновесных процессов, соответственно:

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \qquad (5.3)$$

- ✓ Неравенство Клаузиуса:

$$\Delta S \geq 0, \qquad (5.4)$$

где ΔS – изменение энтропии макросистемы для круговых процессов, причем $\Delta S > 0$ – для необратимых процессов, $\Delta S = 0$ – для обратимых процессов.

- ✓ Изменение энтропии при равновесном (обратимом) переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu}\left[C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right] = \frac{m}{\mu}\left[C_V \ln\frac{P_2}{P_1} + C_p \ln\frac{V_2}{V_1}\right]. \qquad (5.5)$$

- ✓ Формула Больцмана:

$$S = k \ln W, \qquad (5.6)$$

где S – энтропия, k – постоянная Больцмана, W – термодинамическая верояность нахождения системы в данном состоянии.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют циклом? В чем различие прямого и обратного циклов?
2. Как найти графически работу цикла? Каков физический смысл площади, ограниченной кривой цикла, в координатах P-V?
3. Что называют коэффициентом полезного действия тепловой машины?
4. Что понимают под обратимыми и необратимыми процессами? Почему все процессы, сопровождающиеся механическим трением, являются необратимыми?
5. Почему циклы всех реальных тепловых машин необратимы?
6. Какой цикл называют обратимым циклом Карно? Из каких процессов он состоит?
7. По каким циклам работают современные двигатели внутреннего сгорания?
8. Приведите словесные формулировки второго начала термодинамики.
9. Что такое «вечный двигатель» второго рода? В чем различие между «вечным двигателем» первого и второго рода?
10. Что называют приведенным количеством теплоты? Как меняется энтропия системы при обратимом цикле Карно?
11. Как изменяется энтропия системы при приближении термодинамической системы к состоянию термодинамического равновесия?
12. Как изменяется энтропия идеального газа при его адиабатном расширении в пустоту?

Рекомендации к решению задач

1. Приступая к решению задачи, выясните:
   - По какому циклу работает рассматриваемая тепловая машина?
   - Какова работа, совершаемая рабочим телом или над рабочим телом, на каждом этапе цикла? Какова полная работа за цикл?
   - Какое количество теплоты получает или отдает рабочее тело на каждом этапе цикла? Каково полное количество теплоты, которое переносится за цикл рабочим телом от нагревателя к холодильнику и наоборот?
   - Чему равен КПД тепловой машины.
2. Выберите соответствующие выражения для искомых физических величин, для нахождения недостающих параметров *(P,V,T,Q)* используйте уравнения изопроцессов и уравнение теплового баланса.

Задачи

5.1 Тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу A=7,35·10^4Дж. Температура нагревателя t_1 =100^0С, температура холодильника t_2 =0^0С. Найти КПД цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за 1 цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за 1 цикл холодильнику.(*Ответ:* η*=26,8%;* Q_1*=274кДж;* Q_2*=200кДж)*.

5.2 Сравните КПД двух циклов Карно. В первом цикле к рабочему телу теплота подводится при температуре 500 К и отводится при температуре 300 К, а во втором – теплота подводится при температуре 400 К, а отводится при температуре 200 К. *(Ответ: 1)0,4; 2)0,5)*.

5.3 *Паровая машина мощностью P=14,7 кВт потребляет за время t=1час работы массу m=8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания q=3,3·10^7Дж/кг. Температура котла t_1=200^0С, температура холодильника t_2=58^0С. Найти фактический КПД машины и сравнить его с КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.*

Дано: *N=1,47·10^4Вт; τ=3600с; q=3,3·10^7Дж/кг; T_1=473К; T_2=331К.*

Найти: η_1 ; η_2.

Решение

При известной мощности N за 1 час машина совершит полезную работу:

$$A_{полезн} = N \cdot t.$$

Полная работа эквивалентна количеству теплоты, потребленному от сгоревшего угля:

$$A_{полн} = Q = q \cdot m.$$

КПД реальной паровой машины можно вычислить:

$$\eta_1 = \frac{A_{полезн}}{A_{полн}}.$$

КПД идеальной паровой машины:

$$\eta_2 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Ответ: η_1 =20%; η_2 =30%.

5.4 В тепловой машине, работающей по циклу Карно, в качестве рабочего тела используется многоатомный идеальный газ. При этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в n=4 раза. Определить КПД цикла. *(Ответ: 36,7%)*.

5.5 *Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2=0^0C$ кипятильнику с водой при температуре $t_1=100^0C$. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу m_1=1кг воды в кипятильнике?*

Дано: T_1=373K; T_2=273K; m_1=1кг; $r=2{,}25\cdot10^6$ Дж/кг; $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

Найти: m_2.

Решение

Количество теплоты Q_1, необходимое для испарения массы m_1 воды в кипятильнике найдем по формуле:

$$Q_1 = r\cdot m_1, \qquad (1)$$

где r – удельная теплота испарения воды.

Количество теплоты Q_2, отнятое у холодильника (отданной рабочему телу при замерзании воды):

$$Q_2 = \lambda\cdot m_2, \qquad (2)$$

где λ – удельная теплота плавления льда.

КПД идеальной тепловой машины:

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) находим:

$$|Q_2| = |Q_1|\frac{T_2}{T_1}. \qquad (4)$$

Подставив в (4) выражения (1) и (2), получим:

$$m_2 = \frac{m_1\cdot r\cdot T_2}{\lambda\cdot T_1} = \frac{1\cdot 2{,}25\cdot10^6\cdot273}{3{,}35\cdot10^5\cdot373} = 4{,}92\ кг.$$

Ответ: $m\approx 4{,}92$кг.

5.6 Для идеальной холодильной машины, работающей по обратному циклу Карно, за один цикл необходимо совершить работу $A=3{,}3\cdot10^4$Дж. При этом она получает тепло от тела с температурой -10^0C и отдает тепло телу с температурой 20^0С. Определите: 1)КПД холодильника; 2) количество тепла, отнятого у холодного тела за цикл; 3) количество тепла, переданное горячему телу за цикл. *(Ответ: 1) ≈10%; 2) ≈2,97·10⁵Дж; 3) ≈3,3·10⁵Дж).*

5.7 Домашний холодильник потребляет из электрической сети 200 Вт. Температура окружающей среды (воздух в комнате) T_0=293К. Определите температуру в камере холодильника T_1, если количество отведенного тепла в 5 раз превышает количество затраченной энергии. Холодильник работает по циклу Карно. *(Ответ: $T=5T_0/6$=244К).*

5.8 *Найдите работу, производимую идеальным газом, и количество тепла, получаемое им при совершении кругового процесса, состоящего из двух изохорных и двух изобарных процессов. Система последовательно проходит следующие состояния: 1) P_1V_1; 2) P_1V_2; 3) P_2V_2; 4) P_2V_1; 5) P_1V_1 . Нарисуйте график процесса.*

Решение

Нарисуем график процесса (рис. 5.8). Изменение внутренней энергии для кругового процесса равно нулю, так как начальное состояние совпадает с конечным. Поэтому работа совершаемая газом, и поглощенное им тепло Q равны друг другу.

При изохорных процессах работа равна нулю, а при изобарных она определяется соответственно для изобары с $P=P_1$:

$$A_1 = P_1(V_2 - V_1),$$

и для второй изобары:

$$A_2 = P_2(V_1 - V_2).$$

Таким образом:

$$Q = A = (P_1 - P_2)(V_2 - V_1).$$

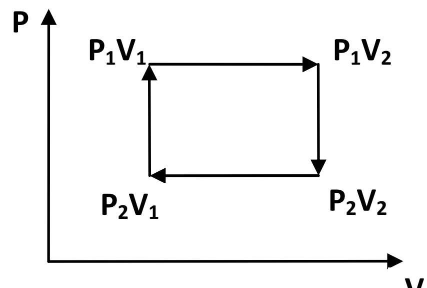


Рис.5.8

Ответ: $A = (P_1 - P_2)(V_2 - V_1)$.

5.9 Идеальный двухатомный газ (ν=3 моль), занимающий объем V_1=5л и находящийся под давлением P_1=1МПа, подвергли изохорному нагреванию до T_2=500К. После этого газ подвергли изотермическому расширению до начального давления, а затем в результате изобарного сжатия он был возвращен в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла. *(Ответ: 13%).*

5.10 Идеальный двухатомный газ, занимающий объем V_1=2л, подвергают адиабатическому расширению, в результате которого его объем возрос в n=5 раз. После этого газ подвергли изобарному сжатию до первоначального объема, а затем он в результате изохорного нагревания возвращен в первоначальное состояние. Построить график цикла и определить КПД цикла. *(Ответ: 34%).*

5.11 *Определите КПД цикла прямоточного воздушно-реактивного двигателя (рис.5.11), состоящего из двух изобар 1-2 и 3-4 и двух адиабат 4-1 и 2-3, если известно, что при адиабатном сжатии газа давление увеличилось в* $n=P_1/P_4$.

Дано: $n=P_1/P_4$.

Найти: η .

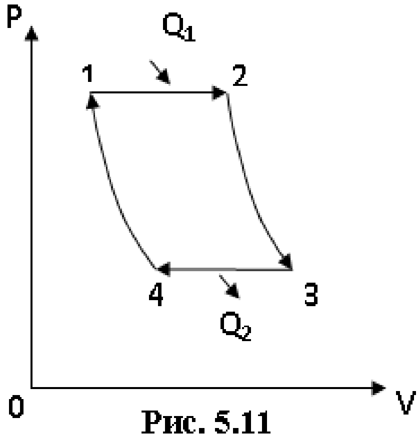


Рис. 5.11

Решение

1. На участке 1-2 газ получает количество тепла $Q_1 = C_P(T_2 - T_1)$ *и изобарно расширяется до состояния с параметрами* P_1,T_2,V_2. *На участке 2-3 газ расширяется адиабатно* ($\Delta Q=0$) *до состояния* P_3,T_3,V_3.

2. На участке 3-4 газ изобарно сжимают до состояния $P_4=P_3$, T_4, V_4, *при этом он отдает количество теплоты* $Q_2 = C_P(T_3 - T_4)$. *На участке 4-1 газ адиабатно сжимается до первоначального состояния* P_1,T_1,V_1.

3. Таким образом, КПД равен: $\eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$.

4. Из уравнения адиабаты (4.15) найдем температуры T_1 *и* T_2*:*

$$T_2\, P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3\, P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\text{, отсюда } T_2 = T_3\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};$$

$$T_4\, P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1\, P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\text{, отсюда } T_1 = T_4\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

5. Учитывая уравнение изобарного процесса на участке 3–4: $\dfrac{T_3}{V_3} = \dfrac{T_4}{V_4}$,

получим $T_4 = T_3 \dfrac{V_4}{V_3}$.

6. Подставим значения температур в выражения для η*:*

$$\eta = 1 - \frac{C_p\left(T_3 - T_3 \dfrac{V_4}{V_3}\right)}{C_p\left(T_3 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_4 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = 1 - \frac{\left(T_3 - T_3 \dfrac{V_4}{V_3}\right)}{\left(T_3 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_3 \dfrac{V_4}{V_3} \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{1}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

5.12 *Цикл двигателя Дизеля, состоит из изобары 2-3, изохоры 4-1 и двух адиабат 1-2 и 3-4 (рис. 5.12). Определите коэффициент полезного действия цикла, если известны коэффициент адиабатного сжатия $n=V_1/V_2$ и коэффициент изобарного расширения $k=V_3/V_2$.*

Дано: $n=V_1/V_2$; $k=V_3/V_2$.

Найти: η .

Решение

Диаграмма (рис. 5.12) показывает рабочий цикл двигателя Дизеля.

*Процесс начинается с всасывания воздуха без горючего: отрезок 0-1 показывает изобарное расширение газа. Это - **первый такт** двигателя, который, как и последний – выхлоп, служит для обновления рабочего тела и поэтому является вспомогательным (P_1,V_1,T_1).*

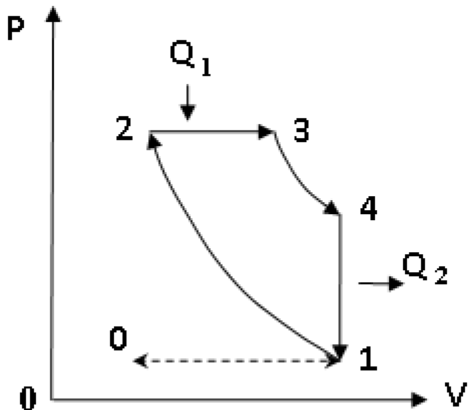


Рис. 5.12

*На участке 1-2 **(второй такт)** воздух адиабатно сжимается (P_2,V_2,T_2) и поэтому сильно нагревается. В момент наибольшего сжатия в цилиндр через форсунку вбрызгивается топливо, которое вследствие высокой температуры самовоспламеняется.*

*Расширение продуктов сгорания вызывает **третий такт** поршня, сопровождающийся следующими процессами: 2-3 изобарное расширение газа при сгорании топлива;3-4 адиабатное расширение газа;4-1 изохорное охлаждение. **Четвертый такт** – выхлоп.*

Количество теплоты Q_1 подводится в результате сгорания топлива на участке 2-3. Оно равно:

$$Q_1 = C_P\left(T_3 - T_2\right).$$

При охлаждении на участке 4-1 высвобождается количество теплоты Q_2: $$Q_2 = C_V\left(T_4 - T_1\right).$$

КПД цикла Дизеля может быть вычислен по формуле:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V\left(T_4 - T_1\right)}{C_P\left(T_3 - T_2\right)} \ . \qquad (1)$$

1. Для участка 1-2 запишем уравнение адиабаты:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

и найдем выражение для T_2 с учетом условия задачи:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \cdot n^{\gamma-1}.$$

2. Из уравнения изобары для участка 2-3: $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$ *получим выражение для температуры* T_3*:*

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = k \cdot T_2 = k \cdot T_1 \cdot n^{\gamma - 1}. \qquad (2)$$

Отсюда: $Q_1 = C_P \left(k \cdot T_1 \cdot n^{\gamma-1} - T_1 \cdot n^{\gamma-1} \right) = C_P \cdot T_1 \cdot n^{\gamma-1} (k-1).$ *(3)*

3. Для участка 3-4 запишем уравнения адиабаты, определяющие взаимосвязь «давление-объем» и «давление-температура»:

$$P_3 V_3^{\gamma} = P_4 V_1^{\gamma}, \qquad (4)$$

$$T_3 P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \qquad (5)$$

Из (3) с учетом $V_1 = nV_2$ *и* $k = V_3/V_2$ *получим:*

$$\frac{P_3}{P_4} = \left(n \frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma} = \left(\frac{n}{k} \right)^{\gamma}. \qquad (6)$$

Подставив в (5) выражения (4) и (6) и учтя, что $V_1 = V_4$*, получим для температуры* T_4*:*

$$T_4 = k^{\gamma} \cdot T_1. \qquad (7)$$

Отсюда: $Q_2 = C_V (T_4 - T_1) = C_V \left(k^{\gamma} \cdot T_1 - T_1 \right) = C_V \cdot T_1 \left(k^{\gamma} - 1 \right).$ *(8)*

4. Подставив в (1) выражения (3) и (8) получим КПД цикла Дизеля:

$$\eta = 1 - \frac{C_V \cdot T_1 (k^{\gamma} - 1)}{C_P \cdot T_1 (k-1) \cdot n^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(k^{\gamma} - 1)}{(k-1) \cdot n^{\gamma-1}}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(k^{\gamma} - 1)}{(k-1) \cdot n^{\gamma-1}}$

5.13 Найдите выражение для коэффициента полезного действия карбюраторного четырехтактного двигателя внутреннего сгорания, работающего по циклу Отто (рис.5.13), состоящему из двух адиабатных и двух изохорных процессов, если известна степень сжатия горючей смеси $n = V_1/V_2$, которую можно считать идеальным газом.

(Ответ: $\eta = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}$*).*

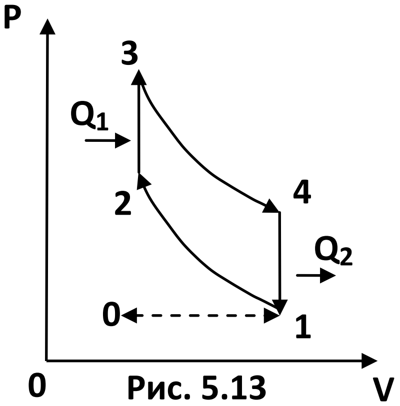


Рис. 5.13

5.14 *Вычислите изменение энтропии одного моля идеального газа при расширении по политропе* $PV^n = const$ *от объема* V_1 *до объема* V_2. *Рассмотрите процессы: а) изотермический; б) адиабатный; в) изобарный (процессы считать обратимыми).*

Решение

Изменение энтропии 1 моля идеального газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 можно вычислить по формуле:

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \left[C_V \ln\frac{P_2}{P_1} + C_P \ln\frac{V_2}{V_1} \right].$$

Из уравнения политропического процесса $PV^n = const$ *можно записать:*

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-n},$$

поэтому:

$$\Delta S_{1-2} = (C_P - nC_V)\cdot \ln\frac{V_2}{V_1}, \quad \text{где} \quad n = \frac{C - C_P}{C - C_V}.$$

а) При изотермическом процессе n=1, тогда

$$C_P - nC_V = R \quad \text{и} \quad \Delta S_T = R\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

б) При адиабатном процессе $n=\gamma$; $C_P - nC_V = 0$; *тогда* $(\Delta S)_{ад} = 0$.

в) При изобарном процессе n=0, тогда $(\Delta S)_P = C_P \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$.

5.15 Масса m=10,5г азота изотермически расширяется от объема V_1=2л до объема V_2=5л. Найти приращение энтропии при этом процессе. *(Ответ: 2,86Дж/К).*

5.16 При нагревании количества $\nu=10^3$молей 2-х атомного газа его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2=1,5T_1$. Найти приращение энтропии ΔS, если нагревание происходит: а) при постоянном объеме; б) при постоянном давлении. *(Ответ:а) 8,42·10*^{3} *Дж/К; б)1,18·10*^{4} *Дж/К).*

5.17 Определите изменение энтропии водорода массой m=1г, если а) газ сначала адиабатно сжимают до вдвое меньшего объема, а затем изохорно охлаждают до первоначальной температуры; б) газ сначала адиабатно сжимают до вдвое меньшего объема, а затем изотермически расширяют до начального объема. *(Ответ: а) –2,88 Дж/К; б) 17,3 Дж/К).*

5.18 Найти приращение энтропии ΔS при превращении массы m=1г воды, взятой при температуре $t_1=0^0$С, в пар. ($r=2,25\cdot10^6$Дж/кг, $c=4,18\cdot10^3$Дж/кг·К). *(Ответ: 7,3 Дж/К).*

Раздел 2.
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА. ПОТЕНЦИАЛ

✓ Закон Кулона

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (6.1)$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2; r – расстояние между ними; ε_0=8,85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная; ε – электрическая проницаемость среды.

✓ Напряженность электрического поля в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (6.2)$$

где q – пробный заряд, помещенный в данную точку поля; $\vec{F}$ – сила, действующая на него со стороны поля.

✓ Напряженность электростатического поля точечного заряда q_1 на расстоянии r от заряда:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (6.3)$$

✓ Принцип суперпозиции (наложения) полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (6.4)$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность поля, создаваемого зарядом q_j.

✓ Поток вектора напряженности электростатического поля:

– через элементарную площадку dS :

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS; \qquad (6.5а)$$

– через произвольную замкнутую поверхность S:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS, \qquad (6.5б)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с внешней нормалью $\vec{n}$ к площадке; E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS.

✓ Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов:

$$\tau = \frac{dq}{dl} \quad \text{(а)}; \qquad \sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{(б)}; \qquad \rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{(в)}. \qquad (6.6)$$

- ✓ Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV, \qquad (6.7)$$

где $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; N – число зарядов; ρ – объемная плотность зарядов.

- ✓ Напряженность электрического поля в вакууме:

– бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \qquad (6.8)$$

– между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью заряда σ бесконечными параллельными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \qquad (6.9)$$

– равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с суммарным зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри сферы)}; \qquad (6.10а)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \text{ (вне сферы)}. \qquad (6.10б)$$

– объемно заряженного шара радиуса R с суммарным зарядом q на расстоянии r от центра шара:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \text{ при } r \le R \text{ (внутри шара)}; \qquad (6.11а)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \text{ при } r \ge R \text{ (вне шара)}. \qquad (6.11б)$$

– равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ бесконечного цилиндра радиуса R на расстоянии r от оси цилиндра:

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри цилиндра)}; \qquad (6.12а)$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \text{ при } r >> R \text{ (вне цилиндра)}. \qquad (6.12б)$$

- ✓ Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура L:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0, \qquad (6.13)$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$ вдоль контура.

- ✓ Разность потенциалов между двумя точками 1 и 2 в электростатическом поле:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}\,, \qquad (6.14)$$

интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки.

- ✓ Потенциал электростатического поля точечного заряда q_1 на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\varepsilon\, r}. \qquad (6.15)$$

- ✓ Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right), \qquad (6.16а)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей, знак «–» определяется тем, что вектор $\vec{E}$ поля направлен в сторону убывания потенциала.
Для поля, обладающего центральной или осевой симметрией:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (6.16б)$$

- ✓ Потенциал системы точечных зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \qquad (6.17)$$

- ✓ Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (6.18)$$

- ✓ Энергия взаимодействия:
  – двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon\, r}; \qquad (6.19а)$$

  – системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \qquad (6.19б)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется пробным электрическим зарядом? Какие к нему предъявляются требования?
2. Дайте определение напряженности поля в данной точке.

3. Что называется силовой линией напряженности электростатического поля? Как они проводятся?
4. Как изобразить электрическое поле положительного точечного заряда, отрицательного заряда, двух одноименных, двух разноименных зарядов?
5. Какое электрическое поле называется однородным? Неоднородным?
6. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.
7. Что называется электрическим диполем?
8. Что называется линейной, поверхностной и объемной плотностью электрических зарядов? Как по известной плотности рассчитать весь электрический заряд?
9. Каков физический смысл потока вектора напряженности?
10. Чему равен поток вектора напряженности через замкнутую поверхность, если алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности равна нулю?
11. Какие поля называют потенциальными? Покажите, что электростатическое поле является потенциальным.
12. Что понимают под потенциалом электростатического поля?
13. Какова связь между напряженностью и потенциалом?
14. Что называется эквипотенциальной поверхностью? Как расположены силовые линии по отношению к эквипотенциальным поверхностям?
15. Почему потенциал Земли можно принять равным нулю?

Рекомендации к решению задач

1. Выясните, чем создается рассматриваемое электрическое поле: точечными или распределенными зарядами.
2. Если в условие включены элементы механики, то сделайте чертеж, укажите на чертеже все силы, действующие на точечный заряд, запишите условие равновесия или основное уравнение динамики материальной точки.
3. Если в условии задачи не указывается среда, в которой взаимодействуют заряды, то подразумевается вакуум (ε=1) или воздух.
4. Если электрическое поле образовано шаром (сферой) с равномерно распределенным на его поверхности зарядом, то при нахождении характеристик поля вне шара считают, что весь заряд шара сосредоточен в его геометрическом центре.
5. Запишите уравнения для расчета напряженности, потенциала или работы сил электростатического поля. При необходимости используйте принцип суперпозиции для сил, полей и потенциалов.

Задачи

6.1. Заряды $q_1=q_2=q_3=10^{-6}$Кл расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 20 см. а) Найти силу, действующую на один из этих зарядов со стороны 2-х других зарядов в воздухе. б) Как изменится величина силы, если заряд $q_1= -1\cdot10^{-6}$Кл?

Дано:
$q_1=q_2=q_3=10^{-6}$*Кл*; $a=20$ *см* $=2\cdot10^{-1}$*м*;
$q_1^*= -1\cdot10^{-6}$*Кл*; $\varepsilon=1$.
Найти: F_Σ; F_Σ^*.

Решение

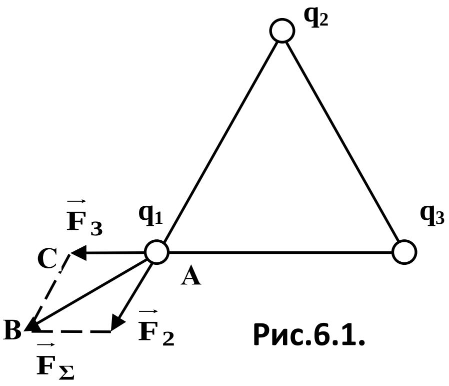


Рис.6.1.

Найдем силу, действующую на заряд q_1 в точке А (рис.6.1). Так как все заряды одноименные, то между ними действуют силы отталкивания. Заряд q_2 действует на заряд q_1 с силой $\overrightarrow{F_2}$, а заряд q_3 – с силой $\overrightarrow{F_3}$, равной по модулю силе F_2. Равнодействующую этих сил $\overrightarrow{F_\Sigma}$ найдем по правилу параллелограмма: $\overrightarrow{F_\Sigma}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$.

Модуль вектора $\overrightarrow{F_\Sigma}$ найдем по теореме косинусов:

$$F_\Sigma=\sqrt{F_2^2+F_3^2-2F_2F_3\cos\angle ACB}\,. \qquad (1)$$

Так как треугольник равносторонний, то

$$F_\Sigma=\sqrt{F_2^2+F_3^2-2F_2F_3\cos120^0}=\sqrt{F_2^2+F_3^2+2F_2F_3\cos60^0} \qquad (2)$$

Для вычисления сил F_2 и F_3 воспользуемся законом Кулона (6.1):

$$F_2=F_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Подставив в (2) выражение для сил (3), получим искомое значение результирующей силы, действующей на заряд q_1:

$$F_\Sigma=\sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{a^2}\right)^2\cdot\cos60^0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2\left(1+\cos60^0\right)}.$$

$$F_\Sigma=\frac{1}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\cdot\frac{10^{-12}}{4\cdot10^{-2}}\cdot\sqrt{2(1+0{,}5)}=0{,}39H.$$

На вопрос б) рекомендуется ответить самостоятельно.
Ответ: *а)* $F_\Sigma=0{,}39$*Н*; *б)* $F_\Sigma^*=0{,}22$*Н*.

6.2. Два шарика одинаковых радиусов и масс, изготовленные из одного материала, подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины и заряжены одноименными зарядами. Какова должна быть диэлектрическая проницаемость жидкого диэлектрика, чтобы при погружении в него этой системы угол расхождения нитей остался таким же, как в воздухе? Отношение плотности материала шариков к плотности жидкого диэлектрика равно 3. *(Ответ: $\varepsilon=1{,}5$).*

6.3. Четыре одноименных заряда q=2,33·10^{-9}Кл расположены в вершинах квадрата. Какой отрицательный заряд q_0 нужно поместить в центре этого квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю? Будет ли полученное равновесие устойчивым? *(Ответ: q_0=2,2·10^{-9}Кл, равновесие неустойчиво).*

6.4. Два одинаковых металлических шарика, имеющих заряды q_1= 9·10^{-8}Кл и q_2 = 3·10^{-8}Кл, приведены в соприкосновение и разведены на прежнее расстояние. Определите отношение модулей сил взаимодействия шариков до и после соприкосновения. *(Ответ: 0,75).*

6.5. Найти напряженность поля E в точке, лежащей посередине между точечными зарядами q_1=8 нКл и q_2=-6нКл. Расстояние между зарядами r=10см и ε=1. Чему равна напряженность поля, если второй заряд положительный? *(Ответ: 5,04·10^{4}В/м; 7,2·10^{3}В/м).*

6.6. *Молекулу воды можно рассматривать как диполь длиной l=3,9·10^{-11}м с зарядами, модуль которых равен модулю заряда электрона. Определите напряженность E электростатического поля, создаваемого одной молекулой воды на расстоянии d=3·10^{-9}м от середины диполя в точке A, лежащей на продолжении диполя, и в точке B, лежащей на перпендикуляре, восставленном из середины диполя.*

Дано: *l=3,9·10^{-11}м; $q=q_+=|q_-|$=1,6·10^{-19}Кл;d=3·10^{-9}м.*

Найти: *E_A; E_B.*

Решение

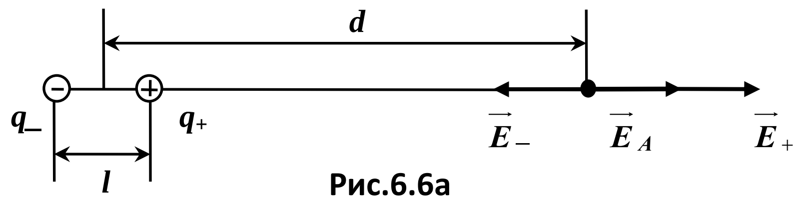


Рис.6.6а

Напряженность поля диполя в точке A (рис. 6.6а) направлена по оси диполя и, согласно принципу суперпозиции, равна сумме напряженностей полей E_+ и E_-, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_- . \qquad (1)$$

Как следует из рисунка 6.6а, напряженность поля диполя в точке A по модулю равна:

$$E_A = E_+ - E_- . \qquad (2)$$

Напряженности поля, создаваемые в точке A положительным и отрицательным зарядами, соответственно равны:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(d - \frac{l}{2}\right)^2} ; \qquad (3)$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(d + \frac{l}{2}\right)^2} \quad . \qquad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{\left(d - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(d + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\left(d + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(d - \frac{l}{2}\right)^2 \cdot \left(d + \frac{l}{2}\right)^2} \right]. \qquad (5)$$

Из условия задачи следует, что $d >> l/2$. *Тогда выражение (5) преобразуется к виду:*

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2ql}{d^3} = \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 d^3}. \qquad (6)$$

$$E_A = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}9 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 27 \cdot 10^{-27}} = 4{,}16 \cdot 10^6 \, В/м.$$

2. Найдем поле диполя в точке В с помощью векторов напряженности (рис. 6.6б).

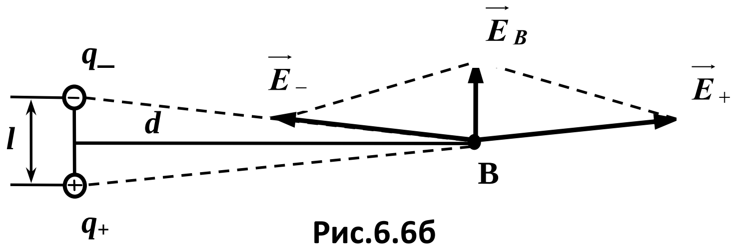


Рис.6.6б

Так как точка В удалена от зарядов диполя на одинаковые расстояния, то:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2}. \qquad (7)$$

Рассмотрев подобные равнобедренные треугольники, опирающиеся на плечо диполя и на вектор E_B, *а также учитывая, что d»l, получим:*

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \approx \frac{l}{d}. \qquad (8)$$

Подставив формулу (8) в (7) и сравнив с выражением (6), получим искомую формулу для напряженности поля диполя в точке В:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{d^3} = \frac{E_A}{2}.$$

Ответ: *E_A=4,16·10^6В/м; E_B=E_A/2=2,08·10^6В/м.*

6.7. Расстояние l между двумя точечными зарядами q_1=7,5нКл и q_2=-14,7нКл, расположенными в вакууме, равно 5 см. Определите напряженность E в точке A, удаленной от первого заряда на расстояние r_1=3см и от второго заряда на r_2=4см. *(Ответ: 112 кВ/м).*

6.8. В вершинах квадрата со стороной 5см находятся одинаковые положительные заряды q=2нКл. Определите напряженность электростатического поля в центре квадрата и в середине одной из сторон квадрата. *(Ответ:0; $1{,}03\cdot10^4$ В/м).*

6.9. Медный ($\rho_{меди}=8{,}6\cdot10^3$кг/м^3) шар радиусом R=0,5см с зарядом $q=1{,}13\cdot10^{-8}$Кл помещен в масло ($\rho_{масла}=0{,}8\cdot10^3$кг/м^3) в однородном электрическом поле. Какой должна быть по модулю и по направлению напряженность поля, чтобы шар оказался взвешенным в масле? *(Ответ: $E=3{,}6\cdot10^6$ В/м).*

6.10. *Круглая площадка радиусом r=20см помещена в вакууме в электростатическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 6.10) с поверхностной плотностью $\sigma=4\cdot10^{-6}$Кл/м^2. Плоскость площадки составляет с линиями напряженности угол $\beta=30^0$. Определите поток Φ_E вектора напряженности, пронизывающий эту площадку.*

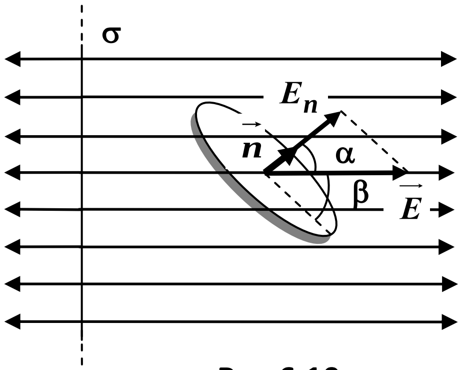


Рис.6.10

Дано: *σ=2мкКл/м^2=$2\cdot10^{-6}$Кл/м^2; r=20см=0,2м;$\beta=30^0$.*
Найти: *Φ_E.*

Решение

Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает однородное поле, напряженность которого можно вычислить по формуле (6.8).

Поток вектора напряженности сквозь площадку S, согласно (6.5а), можно вычислить по формуле:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = ES\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $E_n = E\cdot\cos\alpha$ - проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль n к поверхности площадки S, одинаковая для всей площадки, поэтому интегрирование проводится по всей поверхности S площадки, которую пронизывают линии напряженности.

Учитывая, что $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta$ (см. рис. 6.10), а поле однородное, запишем формулу (1) в виде:

$$\Phi_E = ES\sin\beta. \qquad (2)$$

Подставив E из (6.8) в (2) и учитывая, что S=πr^2,получим искомое выражение для потока вектора напряженности:

$$Ф_E = \frac{\sigma \cdot \pi \cdot r^2}{2\varepsilon_0} \cdot sin\beta = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}2)^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot sin30^0 = 7{,}1 \cdot 10^3\ В \cdot м.$$

Ответ: *$Ф_E$=7,1·10^3В·м.*

6.11. Определить поток $Ф_E$ вектора напряженности электростатического поля через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды q_1=5 нКл и q_2=-4нКл и q_3=2 нКл . *(Ответ: 339 В·м).*

6.12. К заряженной бесконечной вертикальной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ=40мкКл/м^2 подвешен на нити одноименно заряженный шарик массой m=1г и зарядом Q=1нКл. Какой угол α с плоскостью образует нить, на которой подвешен шарик? *(Ответ: 13^0).*

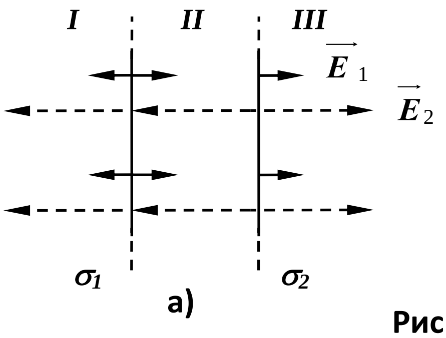
6.13. *Электростатическое поле создано двумя бесконечными параллельными плоскостями в вакууме, заряженными равномерно с поверхностными плотностями σ_1= 1 нКл/м^2 и σ_2= 3 нКл/м^2. 1) Определить напряженность электростатического поля между плоскостями и за пределами плоскостей. 2) Построить график изменения напряженности электростатического поля вдоль линии, перпендикулярной плоскостям.*

Дано: *σ_1=1 нКл/м^2=1·10^{-9}Кл/м^2; σ_2= 3 нКл/м^2=3·10^{-9}Кл/м^2; ε_0=8,85·10^{-12}Ф/м.*

Найти: *E^I ; E^{II} ; E^{III} ; E=f(x).*

Решение

Плоскости делят все пространство на три области (рис.6.13а): I, II и III. Каждая из заряженных плоскостей создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости. С помощью силовых линий напряженности изобразим поля, создаваемые обеими заряженным плоскостями. На рисунке сплошные линии соответствуют полю, созданному плоскостью, имеющей поверхностную плотность заряда σ_1 , а штриховые – полю, созданному плоскостью поверхностной плотностью заряда σ_2.



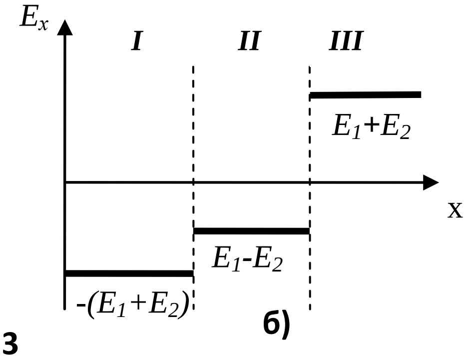


Рис.6.13

Напряженности полей, создаваемых первой и второй плоскостями, согласно (6.8), соответственно равны:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad и \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Для определения напряженности поля, создаваемого обеими плоскостями, воспользуемся принципом суперпозиции (6.4):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Как видно из рисунка, в областях I и III силовые линии обоих полей сонаправлены друг с другом, следовательно, напряженности суммарных полей E^I и E^{III} в этих областях равны между собой и равны модулю суммы напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^I = E^{III} = \left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right| = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} . \qquad (2)$$

В области II (между плоскостями) силовые линии напряженностей обоих полей направлены в противоположные стороны, следовательно, напряженность поля E^{II} равна модулю разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{II} = \left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} . \qquad (3)$$

Подставив в (2) и (3) данные из условия задачи, и проведя вычисления, получим:

$$E^I = E^{III} = \frac{1 \cdot 10^{-9} + 3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 226 \ \ В/м ;$$

$$E^{II} = \frac{\left|1 \cdot 10^{-9} - 3 \cdot 10^{-9}\right|}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 113 \ \ В/м .$$

Построим график изменения напряженности поля вдоль оси X, перпендикулярной плоскостям (рис.6.13б). При построении учтем знаки проекций векторов напряженностей результирующих полей E^I, E^{II} и E^{III} на направление оси.

Ответ: *E^I=E^{III} =226 В/м; E^{II} =113 В/м.*

6.14. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными плоскостями, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1=2 нКл/м^2 и σ_2= -5 нКл/м^2. Определить: 1) напряженность поля между пластинами и вне пластин; 2) Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам. *(Ответ: 396 В/м; 170 В/м).*

6.15. На металлической сфере радиусом R=15см, в вакууме, равномерно распределен заряд q=2нКл. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии r_1=10см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии r_2=20см от центра сферы. Постройте график зависимости *E(r)*. *(Ответ: 1) 0; 2) 800 В/м; 3)450 В/м).*

6.16. Шар радиусом R=10см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ=10нКл/м^3. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии r_1=5см от центра шара; 2) на расстоянии r_2=15см от центра шара. Построить зависимость *E(r)*. *(Ответ : 1) 18,8 В/м; 2) 16,7 В/м).*

6.17. Электростатическое поле создается бесконечным цилиндром радиусом R=2см, заряженным в вакууме равномерно с линейной плотностью $\tau=2\cdot10^{-9}$Кл/м. Определите напряженность электростатического поля, создаваемого цилиндром: 1) на расстоянии r_1=1см от оси цилиндра; 2) на расстоянии r_2=10см от оси цилиндра. *(Ответ: 0; ≈360 В/м).*

6.18. *В поле, создаваемом бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ=4мкКл/м^2, на расстоянии r_1=4см от плоскости помещен заряд q=2нКл. Какую работу надо совершить, чтобы переместить заряд вдоль линии напряженности до расстояния r_2=2см?*

Дано: *q=2нКл=$2\cdot10^{-9}$Кл ;r_1=4см;Δr=2см;σ=4мкКл/м^2=$4\cdot10^{-6}$Кл/м^2 .*

Найти: *A_{12}.*

Решение

Элементарная работа сил поля при перемещении заряда на расстояние dr равна: $dA=\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=F\cdot dr$,

где $F=qE$ – *сила отталкивания, действующая на заряд в поле плоскости и совпадающая по направлению с осью r.*

Тогда работа по перемещению заряда с расстояния r_1 до расстояния r_2:

$$A_{поля}=\int\limits_{r_1}^{r_2}Fdr=q\cdot E\cdot\left(r_2-r_1\right)\langle\,0\text{, так как } r_2<r_1\ .$$

$$A_{внешн}=-A_{поля}=qE\left(r_1-r_2\right)\rangle\,0\,. \qquad (1)$$

Подставив в (1) формулу для напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью (6.8), получим искомое выражение для работы:

$$A_{12}=\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r_1-r_2\right)=\frac{2\cdot10^{-9}\cdot4\cdot10^{-6}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\left(4-2\right)\cdot10^{-2}=9\cdot10^{-6}\text{ Дж}$$

Ответ: *$A_{12}=9\cdot10^{-6}$Дж.*

6.19. Определите поверхностную плотность заряда шара радиусом R=1см, если при перенесении точечного заряда q=20нКл из ∞ в точку, находящуюся на расстоянии r =1см от поверхности этого шара, совершается работа A=112 мкДж? *(Ответ:10мкКл/м^2).*

6.20. Определите энергию взаимодействия системы двух точечных зарядов q_1=10нКл и q_2=1нКл, расположенных на расстоянии r_1=20см друг от друга. *(Ответ: 0,45 мкДж).*

6.21. *Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии r=10см от центра заряженной сферы радиусом R=1см. Задачу решить, если задана:1) поверхностная плотность заряда на сфере $\sigma=10^{-7}$Кл/м^2. 2) задан потенциал на поверхности сферы φ_0=300В.*

Дано: *r=10см=10^{-1}м; R=1см=10^{-2}м; а)φ_0=300В; б)$\sigma=10^{-7}$Кл/м^2.*

Найти: φ_1 и φ_2.

Решение

а) Для нахождения потенциала точки поля на расстоянии r от равномерно заряженной сферы воспользуемся соотношением между напряженностью электростатического поля и изменением потенциала (6.16б), которое для случая поля сферы можно записать в виде:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E_r dr \qquad (1)$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра вне сферы, может быть вычислена по формуле (6.10б):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \qquad (2)$$

где заряд сферы: $q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2$. (3)

Подставив (3) в (2), (2) в (1) и проведя интегрирование, получим:

$$\varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}.$$

Поскольку $\varphi_\infty = 0$, *то:* $\varphi_r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$.

$$\varphi_1 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{10^{-7} \cdot \left(10^{-2}\right)^2}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-1}} = 11{,}3B.$$

б) Учитывая формулу (6.15), для потенциала на поверхности сферы получим:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}. \qquad (4)$$

Выразив из (4) заряд q и подставив в (6.10б), получим для напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

$$E = \varphi_0 \cdot \frac{R}{r^2}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (1) и проведя интегрирование, получим искомое выражение для потенциала:

$$\varphi_2 = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \varphi_0 \cdot R \cdot \frac{dr}{r^2} = \varphi_0 \cdot \frac{R}{r} = 300 \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 30B.$$

Ответ: *а)11,3В; б) 30В.*

6.22. Металлический шар радиусом R=10 см несет заряд q_1=5нКл. Определите потенциал φ электростатического поля: 1) в центре шара; 2) на поверхности шара 3) на расстоянии 5см от его поверхности. Постройте график зависимости $\varphi(r)$. *(Ответ: 1) 450В 2) 450В 3) 300В).*

6.23. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ=4 нКл/м^2. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии r_1=10см и r_2=30 см от плоскости. *(Ответ: 45,2В).*

6.24. Электростатическое поле создается бесконечно длинным цилиндром радиусом R=7мм, равномерно заряженным с линейной плотностью τ=15нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии r_1=1см и r_2=2 см от поверхности цилиндра. *(Ответ:125 В).*

6.25. Электростатическое поле создается сферой радиусом R=10см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ=5 нКл/м^2. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях r_1=15см и r_2=20 см от поверхности сферы. *(Ответ: 3,77В).*

6.26. Разность потенциалов между двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями φ_1-φ_2= 500В, расстояние между ними d=0,5мм. Определите поверхностную плотность зарядов на пластинах. *(Ответ: 8,85мкКл/м^2).*

6.27. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ=10нКл/м^2. Определите численное значение и направление градиента потенциала электростатического поля, создаваемого этой плоскостью. *(Ответ: $|grad\varphi|$=565 В/м).*

6.28. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда τ=0,2мкКл/м. Какую скорость υ получит покоившийся электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния r_1=1см до r_2=0,5 см? *(Ответ:$2{,}96\cdot 10^7$м/с).*

§7. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

✓ Связь между напряженностью поля E в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}, \tag{7.1}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

✓ Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \tag{7.2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{7.3}$$

✓ Электроемкость уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \tag{7.4}$$

где q – заряд, сообщенный проводнику; φ – потенциал проводника.

- ✓ Электрическая емкость металлической сферы радиуса R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (7.5)$$

- ✓ Электрическая емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad (7.6)$$

где q – заряд, накопленный в конденсаторе; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между его пластинами.

- ✓ Электрическая емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (7.7)$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами.

- ✓ Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектриков толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε_i (слоистый конденсатор):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}}. \qquad (7.8)$$

- ✓ Электрическая емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Rr}{(R - r)}, \qquad (7.9)$$

где r и R – радиусы внутренней и внешней сфер.

- ✓ Общая электроемкость последовательно соединенных n конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}. \qquad (7.10)$$

для n=2:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (7.10а)$$

- ✓ Общая электроемкость параллельно соединенных n конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots C_n. \qquad (7.11)$$

- ✓ Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q \cdot \Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}, \qquad (7.12)$$

где $\Delta\varphi$ - разность потенциалов между пластинами.

- ✓ Энергия электростатического поля внутри плоского конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (\Delta\varphi)^2 Sd}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V}{2}, \qquad (7.13)$$

где S – площадь одной пластины, $(\Delta\varphi)$ – разность потенциалов между пластинами, $V=Sd$ – объем конденсатора.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна работа при перемещении заряда по поверхности заряженного проводника, потенциал которого равен φ_0?
2. Почему при внесении незаряженного проводника в электрическое поле последнее искажается?
3. В чем суть электростатической защиты?
4. Зависит ли поток вектора D через замкнутую поверхность от свойств среды?
5. Как зависит напряженность поля E в диэлектрике от диэлектрических свойств среды?
6. Что понимают под электроемкостью проводника и конденсатора?
7. От чего зависит емкость плоского конденсатора?
8. После отключения плоского воздушного конденсатора от источника напряжения расстояние между его пластинами увеличили. Изменились ли при увеличении расстояния: напряженность поля в конденсаторе; разность потенциалов между пластинами; энергия электрического поля в конденсаторе; емкость и заряд конденсатора?
9. Чему равна емкость системы n конденсаторов, соединенных: а) параллельно; б) последовательно?
10. Как найти емкость конденсатора, если между его обкладками расположено несколько различных диэлектрических слоев?

Рекомендации к решению задач

1. Следует помнить, что

   - диэлектрическая проницаемость среды ε показывает, во сколько раз поле внутри диэлектрика слабее поля в вакууме.
2. Следует помнить, что:

   - если конденсатор подключить к источнику питания, зарядить его и затем отключить, то при изменении его электроемкости заряд на конденсаторе не меняется;

   - если же конденсатор постоянно подключен к источнику питания и не отключен, то при всех изменениях его электроемкости постоянной остается разность потенциалов между пластинами.
3. В случае сложного соединения конденсаторов, которое нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному, можно заменить имеющуюся схему другой, эквивалентной данной, разложив ее на элементы с последовательными и параллельными соединениями. Такая эквивалентная замена основана на правомерности соединять и разъединять точки цепи, имеющие одинаковые потенциалы.

Задачи

7.1. Изобразите графически, как расположены эквипотенциальные поверхности и силовые линии напряженности поля, существующего между металлическим заряженным шаром и заземленной проводящей плоскостью.

7.2. *Два шара, емкости которых C_1=2пФ и C_2=3пФ, заряжены соответственно зарядами q_1=200нКл и q_2=100нКл. Шары находятся на таком большом расстоянии друг от друга, что их можно считать уединенными. 1) Каковы будут заряды на шарах, если их соединить тонким проводником, имеющим пренебрежимо малую емкость по сравнению с электрической емкостью шаров? 2) Каким станет потенциал каждого из шаров?*

Дано: $C_1 = 2пФ = 2\cdot10^{-12}Ф; C_2 = 3пФ = 3\cdot10^{-12}Ф; q_1 = 200нКл = 2\cdot10^{-7}Кл;$
$q_2 = 100нКл = 10^{-7}Кл.$

Найти: $q_1^*; q_2^*; \varphi_1^*; \varphi_2^*$.

Решение

Вычислим потенциалы шаров до соединения:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{2\cdot10^{-7}}{2\cdot10^{-12}} = 10^5\,В; \qquad \varphi_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{10^{-7}}{3\cdot10^{-12}} = 3{,}3\cdot10^4\,В.$$

Так как потенциалы шаров не одинаковы, то после их соединения тонким проводом произойдет перераспределение зарядов: с шара 1, потенциал которого больше, заряды переместятся на шар 2, потенциал которого меньше. Перераспределение зарядов закончится тогда, когда потенциалы шаров сравняются:

$$\varphi_1^* = \varphi_2^*. \qquad (1)$$

Фактически при решении этой задачи мы встречаемся с кратковременным электрическим током, который прекращается, когда разность потенциалов между шарами становится равной нулю. Так как соединительный проводник имеет малую емкость, то ею можно пренебречь.

В соответствии с законом сохранения заряда суммарный заряд шаров до и после их соединения проводником не изменится:

$$q_1 + q_2 = q_1^* + q_2^*. \qquad (2)$$

Тогда для потенциалов шаров после соединения получим:

$$\varphi_1^* = \frac{q_1^*}{C_1} \quad и \quad \varphi_2^* = \frac{q_2^*}{C_2}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1):
$$\frac{q_1^*}{C_1} = \frac{q_2^*}{C_2}. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (2) и (4) получим искомые выражения для зарядов на шарах после их соединения:

$$q_1^* = \frac{C_1(q_1+q_2)}{C_1+C_2} = \frac{2\cdot10^{-12}\cdot3\cdot10^{-7}}{5\cdot10^{-12}} = 120\cdot10^{-9}\,Кл = 120нКл.$$

$$q_2^* = q_1 + q_2 - q_1^* = 180нКл.$$

Тогда потенциал каждого из шаров:

$$\varphi_2^* = \varphi_1^* = \frac{120 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-12}} = 60 \cdot 10^3\,В = 60кВ.$$

Ответ: *q_1=120нКл; q_2=180нКл; φ_1*=φ_2*=60кВ.*

7.3. Два металлических шара радиусами R_1=2см и R_2=6см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь, и им сообщен заряд q=1нКл. Какова поверхностная плотность зарядов на шарах? *(Ответ: 49,8 нКл/м^2; 16,6 нКл/м^2).*

7.4. Шар радиусом R_1=6см заряжен до потенциала φ_1=300 В, а шар радиусом R_2=4 см до потенциала φ_2=500 В. Определить потенциал шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь. *(Ответ: 380 В).*

7.5. Определите электрическую емкость Земли. Считать радиус земного шара R=6400км. Почему потенциал Земли обычно полагают равным нулю? На сколько изменится потенциал земного шара, если ему сообщить заряд q=1 Кл? *(Ответ: 711мкФ; 1,4кВ).*

7.6. *Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов U=600В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной d_1=7 мм и эбонита толщиной d_2=3 мм. Площадь каждой пластины конденсатора S=200см^2. Найти: электроемкость конденсатора; электрическое смещение (индукцию), напряженность поля и падение потенциала в каждом слое.*

Дано: *U=600В;d_1=7мм=$7\cdot10^{-3}$м; d_2=3 мм=$3\cdot10^{-3}$м;*
ε_1=6; ε_2=3; S=200см^2=$2\cdot10^{-2}$м^2.

Найти: *C; D_1; D_2; E_1; E_2; U_1; U_2.*

Решение

Считая, что поле в пределах каждого из диэлектрических слоев однородно, вычислим напряжение на пластинах конденсатора:

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2. \qquad (1)$$

Электрическое смещение D не зависит от свойств среды и в обоих слоях диэлектрика одинаково:

$$D = D_1 = D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим искомые выражения для напряженности поля в каждом из слоев:

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} = \frac{6 \cdot 600}{(3 \cdot 7 + 7 \cdot 3) \cdot 10^{-3}} = 8{,}57 \cdot 10^4\,В = 85{,}7кВ,$$

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot E_2 = \frac{3}{7} \cdot 8{,}57 \cdot 10^4 \approx 36{,}7 \cdot 10^3\,В = 36{,}7кВ.$$

Подставив в (1) значения толщины слоев диэлектрика и напряженностей поля в этих слоях, вычислим падение потенциала в каждом слое:

$$U_1 = E_1 d_1 = 3{,}67 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 256{,}9В \approx 257В$$
$$U_2 = E_2 d_2 = 8{,}57 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 257{,}1В \approx 257В.$$

Из (2) вычислим значение электрического смещения:

$$D = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 3{,}67 \cdot 10^4 = 2{,}27 \cdot 10^{-4}\ Кл/м^2.$$

Используя формулу (7.8) вычислим электроемкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{\frac{7 \cdot 10^{-3}}{7} + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{3}} = 8{,}85 \cdot 10^{-11} Ф.$$

Ответ: *E_1=36,7;E_2=85,7кВ;U_1=257В;U_2=257В;D=2,27·10^{-4}Кл/м^2; C=88,5пФ.*

7.7. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка (ε=6). Конденсатор заряжен до разности потенциалов U=100В. Какова будет разность потенциалов, если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора? *(Ответ: 600В).*

7.8. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ=0,2мкКл/м^2. Расстояние между пластинами d_1=1мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до d_2=3мм? *(Ответ: 45 В).*

7.9. Две концентрические металлические сферы радиусом R_1=2см и R_2=2,1см образуют сферический конденсатор. Определить его электроемкость, если пространство между сферами заполнено парафином (ε=2). *(Ответ: 93,3пФ).*

7.10. *Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов C_1=1мкФ, C_2=2мкФ, C_3=3мкФ заряжена до напряжения 200В. Определите емкость батареи, заряд и напряжение на зажимах каждого конденсатора.*

Дано: *C_1=1мкФ=10^{-6}Ф; C_2=2мкФ=2·10^{-6}Ф; C_3=3мкФ=3·10^{-6}Ф;U=220В.*

Найти: *C_Σ; q_1; q_2;q_3; U_1;U_2;U_3.*

Решение

При последовательном соединении конденсаторов заряды на обкладках любого из конденсаторов одинаковы (по модулю) и равны общему заряду батареи: $q = q_1 = q_2 = q_3$.

Используя формулы (7.6) и (7.10), вычислим суммарную емкость и величину заряда батареи конденсаторов:

$$C_\Sigma = \left(\frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} \right)^{-1} = 5{,}45 \cdot 10^{-7}\ Ф;$$
$$q = C_\Sigma \cdot U = 545 \cdot 10^{-9} \cdot 220 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ Кл.$$

Тогда напряжения на каждом из конденсаторов:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-4}}{10^{-6}} = 120\ В; \quad U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = 60\ В; \quad U_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-6}} = 40\ В.$$

Ответ: *q=120мкКл; C_Σ=545нФ; U_1=120В; U_2=60В; U_3=40В.*

7.11. Конденсатор емкостью C_1=0,2мкФ был заряжен до напряжения U_1=320В. После того, как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до напряжения U_2=450В, напряжение на нем изменилось до U=400В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора. *(Ответ:0,32мкФ).*

7.12. Три одинаковых плоских конденсатора, соединены последовательно. Емкость такой батареи конденсаторов C_Σ=80 пФ. Площадь каждой пластины S=100см^2, диэлектрик – стекло (ε =6). Какова толщина стекла эквивалентного конденсатора? *(Ответ: 2,2мм).*

7.13. Вычислить общую емкость системы конденсаторов C_{AB}, если известно, что емкости C_1=2мкФ и C_2=1 мкФ. *(Ответ:1,6мкФ).*

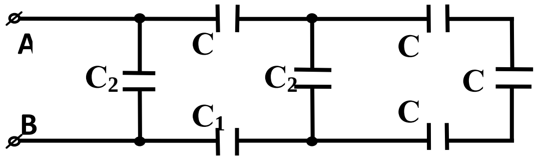


Рис.7.13

7.14. Пробивное напряжение для некоторого диэлектрика толщиной 1мм равно 18кВ. Два конденсатора с изолирующим слоем из такого диэлектрика соединены последовательно. Емкости конденсаторов равны соответственно 1100 пФ и 400 пФ. Будет ли эта система пробита, если подать на нее разность потенциалов 30 кВ? *(Ответ: да).*

7.15. *К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов U_1=500В. Площадь пластин S=200см^2, расстояние между ними d_1=1,5мм. Пластины раздвинули до расстояния d_2=15мм. Как изменилась при этом емкость конденсатора? Найдите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после изменения расстояния между пластинами, если источник напряжения: 1) отключался; 2) не отключался.*

Дано: *U_1=500В; S=200см^2=2·10^{-2}м ; d_1=1,5мм=1,5·10^{-3}м; d_2=15мм=1,5·10^{-2} м.*
Найти: *а) W_1; W_2; б) W_1; W_2.*

Решение

1) Если конденсатор отключен от источника напряжения, то заряд на его обкладках не будет изменяться при раздвигании пластин, то есть $q = const$, поэтому:

$$q = C_1U_1 = C_2U_2, \qquad (1)$$

где C_2 и U_2 – соответственно емкость и разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвигания.

Из формулы (7.7) следует, что при раздвигании пластин емкость конденсатора будет уменьшаться, при этом, согласно (1), будет увеличиваться разность потенциалов на его обкладках.

Подставив (7.7) в (1), получим выражение для U_2:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{d_2}{d_1}. \qquad (2)$$

Для вычисления энергии конденсатора воспользуемся формулой (7.12), в которой энергия конденсатора выражается через его заряд, и, подставив в нее выражение (7.7), получим:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 \cdot d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}. \qquad (3)$$

Из (3) видно, что при раздвигании пластин конденсатора его энергия увеличивается (за счет совершения работы против сил притяжения обкладок конденсатора): $\Delta W = -A$.

Подставив в (3)соотношения (1)и (2), вычислим энергию конденсатора до и после раздвижения его пластин:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1} = \frac{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}47 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж};$$

$$W_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_2^2}{2d_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_1^2 d_2}{2d_1^2} = W_1 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 1{,}47 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}475 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Случай 2) предлагается рассмотреть самостоятельно.

Ответ: *1)W_1=14,7мкДж; W_2=147,5 мкДж; 2) W_1=14,7мкДж; W_2=1,47 мкДж.*

7.16. Конденсаторы емкостью C_1=1мкФ, C_2=2мкФ, C_3=3мкФ включены в цепь с напряжением 1,1кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случае:1) последовательного и 2) параллельного соединения. *(Ответ: 1) 0,18Дж; 0,09Дж; 0,06Дж; 2) 0,605Дж; 1,21Дж; 1,82Дж).*

7.17. Плоский конденсатор имеет в качестве изолирующего слоя стеклянную пластинку (ε=6) толщиной d=2см и площадью S=300см^2. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U=100В, после чего отключен от источника напряжения. Определите работу, которую надо совершить, чтобы вынуть стеклянную пластинку из конденсатора (трение не учитывается). *(Ответ:1,99 мкДж).*

7.18. Два конденсатора, емкости которых C_1=600 пФ и C_2=1000пФ, соединены последовательно. Батарею заряжают до разности потенциалов U=20кВ. Затем конденсаторы не разряжая, соединяют параллельно. Определите работу разряда, происходящего при этом переключении. *(Ответ: $4{,}7 \cdot 10^{-3}$Дж).*

7.19. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d=1см, находится заряженная капелька массой m=5х10^{-11}г. В отсутствие электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U=600В, то капелька падает вдвое медленнее. Найти заряд q капельки. *(Ответ: $4{,}1 \cdot 10^{-18}$ Кл).*

7.20. Электрон движется в плоском горизонтально расположенном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью 3,6х10^{7}м/с. Напряженность поля внутри конденсатора E=3,7кВ/м. Длина пластин конденсатора L=20см. На какое расстояние сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения? *(Ответ: 1см).*

§8. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК
ЗАКОН ОМА. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. КПД ИСТОЧНИКА ТОКА

✓ Сила электрического тока: $I = dq/dt$. (8.1)

✓ Плотность электрического тока в проводнике:

$$j = dI/dS\ ; \quad (8.2а)$$

$$j = ne\langle v\rangle, \quad (8.2б)$$

где dS – площадь поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока; $\langle v\rangle$ – скорость упорядоченного движения заряда в проводнике; n – концентрация зарядов, e – заряд носителей тока.

✓ Сопротивление однородного проводника:

$$R = \rho l/S\ , \quad (8.3)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление, S – площадь поперечного сечения проводника, l – его длина.

✓ Удельная электрическая проводимость проводника:

$$\gamma = 1/\rho\ . \quad (8.4)$$

✓ Зависимость удельного сопротивления проводника ρ от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (8.5)$$

где ρ и ρ_0 – удельное сопротивление проводника при температурах t^0С и 0^0С соответственно; α – температурный коэффициент сопротивления.

✓ Закон Ома:

– для участка цепи, не содержащего ЭДС (однородный участок цепи):

$$I = U_{12}/R_{12}\ , \quad (8.6а)$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение (или разность потенциалов) на участке цепи 1-2, R_{12} – сопротивление участка цепи;

– для участка цепи, содержащего ЭДС (неоднородный участок цепи):

$$U_{12} = \pm IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum \mathcal{E}_i\ , \quad (8.6б)$$

где U_{12} – напряжение на участке цепи 1-2; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; $\sum \mathcal{E}_i$ – алгебраическая сумма ЭДС источников тока, входящих в участок 1-2; R_{12} – полное сопротивление участка 1-2. *Правило выбора знаков*: при обходе участка цепи от точки 1 к точке 2 в правой части уравнения пишем $\varphi_1 - \varphi_2$; принято считать ток I_{12} положительным, если он совпадает с направлением обхода; принято считать $\mathcal{E}_i$ положительной на участке 1-2, если она повышает потенциал в направлении обхода, то есть при мысленном движении вдоль пути 1-2 сначала встречается отрицательный полюс источника, а затем положительный.

– для замкнутого контура ($\varphi_1 = \varphi_2$) , содержащего ЭДС:

$$I = \mathcal{E} / (R + r), \qquad (8.6в)$$

где R – сопротивление внешней части замкнутого контура; r –внутреннее сопротивление источника; $\mathcal{E}$ – ЭДС источника тока замкнутого контура.

- ✓ Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \qquad (8.7)$$

где $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля внутри проводника, γ – удельная электрическая проводимость проводника.

- ✓ Общее сопротивление проводников:

– соединенных последовательно:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i , \qquad (8.8а)$$

– соединенных параллельно:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} , \qquad (8.8б)$$

где R_i – сопротивление каждого проводника, входящего в соединение.

- ✓ Правила Кирхгофа:

– *1-е правило*: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0, \qquad (8.9а)$$

при этом ток, входящий в узел, ставится в уравнение со знаком «плюс»; ток, исходящий от узла, со знаком «минус».

– *2-е правило:* в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений токов на соответствующие сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, имеющихся в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i , \qquad (8.9б)$$

при этом токи, совпадающие с направлением обхода, ставятся в уравнение со знаком «плюс», обратные направлению обхода – со знаком «минус»; знак ЭДС выбирается в соответствии с п.8.6б.

- ✓ Закон Джоуля-Ленца (работа электрического тока):

$$Q = A = IUt = I^2 Rt = U^2 t / R, \qquad (8.10)$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время прохождения тока t; U – напряжение, приложенное к концам проводника; I – сила тока в проводнике; R – сопротивление проводника.

- ✓ Мощность тока: $P = UI = I^2 R = U^2 \!\big/ R$. (8.11)
- ✓ Коэффициент полезного действия источника тока:

$$\eta = \frac{P_{полезн}}{P_{полн}} = \frac{U \cdot I}{\mathcal{E} \cdot I} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + r} \ , \qquad (8.12)$$

где U – разность потенциалов на зажимах источника; $\mathcal{E}$ – ЭДС источника.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется электрическим током. Условия существования постоянного тока.
2. Что принимают за направление электрического тока?
3. Что называется силой тока? Дайте определение силы тока в СИ.
4. Что называется плотностью тока. Единица плотности тока в СИ.
5. От чего зависит сопротивление проводника?
6. Что такое сторонние силы? Какова их роль в возникновении постоянного тока? Дайте определение ЭДС источника.
7. Что называется напряжением на данном участке цепи?
8. Что называется узлом, ветвью и контуром в разветвленных цепях?
9. Сформулируйте правила Кирхгофа.
10. В каких единицах измеряются работа и мощность электрического тока?
11. Дайте определение полной мощности, полезной мощности и мощности потерь.
12. При каких условиях во внешней цепи выделяется максимальная мощность источника тока?
13. Чему равно КПД источника тока?

Рекомендации к решению задач

1. Начертите схему электрической цепи, обозначив на ней полярность источников, а также направление тока в цепи (если оно неизвестно, то укажите предполагаемое направление).
2. Следует помнить, что напряжением U_{12} (или падением напряжения) на участке цепи 1-2 называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой результирующим полем электрических и сторонних сил при перемещении вдоль цепи из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда (см.(8.6б)). Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в том случае, если на участке не действуют сторонние силы.
3. При использовании *правила выбора знаков* следует помнить, что направление обхода участка цепи определяет порядок следования индексов при записи разности потенциалов: в случае обхода участка от точки 1 к точке 2 в правой части уравнения (8.6б) следует писать ($\varphi_1 - \varphi_2$). По возможности направление обхода участка выбирается совпадающим с

направлением тока.

4. При расчете сопротивлений разветвленных цепей используйте метод замены участка цепи эквивалентной (упрощенной) схемой, пользуясь следующим правилом: точки, имеющие одинаковый потенциал, можно соединять и разъединять без влияния на работоспособность схемы.
5. При решении задач с использованием правил Кирхгофа необходимо:
   – выбрать и обозначить узлы разветвления токов и контуры обхода;
   – контуры выбирать таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже рассмотренные ранее контуры;
   – произвольно выбрать направления токов на всех участках разветвленой цепи, указав их направление стрелками на чертеже;

   а) составляя уравнения по 1-му правилу Кирхгофа:
   – для m узлов в цепи записать (m-1) независимых уравнений;
   – соблюдать правило выбора знаков;

   б) составляя уравнения по 2-му правилу Кирхгофа:
   – выбрать направление обхода n контуров цепи и записать (n-1) независимых уравнений;
   – соблюдать правило выбора знаков.

Задачи

8.1 *Какой заряд пройдет по проводнику в течение t_1=10с, если за это время сила тока в проводнике равномерно нарастает от I_1=1А до I_2=5А?*

Дано: *I_1=1А; I_2=5А; t_1=10с.*

Найти: *q.*

Решение

Величина заряда, проходящего через поперечное сечение проводника за время dt, связана с силой тока соотношением (8.1). Поскольку сила тока в цепи изменяется равномерно, то для него можно записать:

$$I = kt\ , \qquad (1)$$

где $k = \frac{I_2 - I_1}{t_1} = const$ – *коэффициент пропорциональности.*

Подставив (1) в (8.1), и проведя интегрирование в пределах от 0 до t_1, получим искомое выражение для заряда:

$$q = \int_0^{t_1} k \cdot t \cdot dt = \frac{kt_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(I_2 - I_1) \cdot t_1^2}{t_1} = \frac{(I_2 - I_1) \cdot t_1}{2} = \frac{(5-1) \cdot 10}{2} = 20 Кл.$$

Ответ: *q=20 Кл.*

8.2 Определить плотность тока, если за 2 с через проводник сечением 1,6 мм^2 прошло $2 \cdot 10^{19}$ электронов. *(Ответ: 1 А/мм^2).*

8.3 Плотность тока *j* в алюминиевом проводнике равна 1А/мм^2. Определите напряженность *E* электрического поля в этом проводнике. Удельное сопротивление алюминия ρ=2,6·10^{-8} Ом·м. *(Ответ: 2,6·10^{-2}В/м).*

8.4 Имеется моток медной проволоки массой m=0,3кг с площадью поперечного сечения S=0,1мм^2. Определите сопротивление R проволоки (плотность меди ρ^*=8,9·10^{3}кг/м^3; удельное сопротивление меди ρ=1,6·10^{-8} Ом·м). *(Ответ: 53,9 Ом).*

8.5 Электролампа с вольфрамовой нитью накаливания включена в цепь постоянного тока с силой тока I=0,2А. Найти напряженность E электрического поля в нити лампы при ее горении при повышении температуры от t_1=20^{0}С до t_2=2000^{0}С? Диаметр нити d=0,02мм, удельное сопротивление вольфрама при комнатной температуре ρ_0=5,5·10^{-8} Ом·м, температурный коэффициент сопротивления вольфрама α=5·10^{-3} град$^{-1}$. *(Ответ: 315 В/м).*

8.6 Обмотка электромагнитов в электрической машине сделана из медного провода и при температуре t_1=10^{0}С имеет сопротивление R_1=14,2 Ом. После работы сопротивление обмотки повысилось до R_2=16,5 Ом. Какова при этом температура t_2 обмотки? (Температурный коэффициент сопротивления меди α=4,3·10^{-3}град$^{-1}$). *(Ответ: 49,6^{0}С).*

8.7 Запишите закон Ома для неоднородных участков цепи (рисунок 8.7 а), б) и в)), объясните физический смысл различий в полученных выражениях. Постройте диаграммы изменения потенциала между точками А и В (потенциальные диаграммы) для каждого участка.

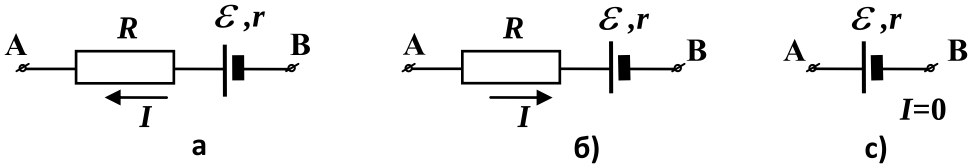


Рис. 8.7

8.8 Участок цепи (рис. 8.8) содержит источник с ЭДС $\mathcal{E}$ =5В и два резистора, сопротивления которых R_1=3,7 Ом и R_2=5,6 Ом. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Сила тока на участке цепи I =1 А. Определите разность потенциалов между точками А и В, В и С, А и С в двух случаях: а) ток идет от точки А к точке С; б) ток идет от точки С к точке А. *(Ответ: а) 3,7В; 10,6В; 14,3В б) 3,7В; 0,6В; 4,3В).*

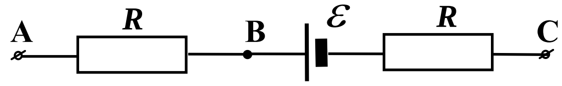


Рис. 8.8

8.9 Вольтметр, включенный в сеть последовательно с сопротивлением R_1, показал напряжение U_1=198 В, а при включении последовательно с сопротивлением R_2=$2R_1$, показал U_2=180 В. Определить сопротивление R_1 и напряжение в сети, если сопротивление вольтметра r_V=900 Ом. *(Ответ: 100 Ом, 220 В).*

8.10 *Два источника тока , имеющие ЭДС $\mathcal{E}_1$=1,5В и $\mathcal{E}_2$=1,6В и внутренние сопротивления r_1=0,6 Ом и r_2=0,4 Ом, соединены разноименными полюсами (рис.8.10). Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, оп-*

ределите разность потенциалов между точками А и В. Как изменятся результаты, если источники будут иметь одинаковые ЭДС и внутренние сопротивления?

Дано: *$\mathcal{E}_1$=1,5В; $\mathcal{E}_2$=1,6В; r_1=0,6 Ом; r_2=0,4 Ом.*

Найти: *$\Delta\varphi_{AB}$.*

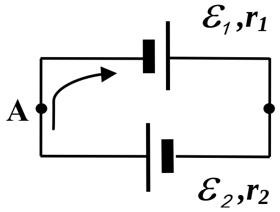


Рис.8.10

Решение

Рассмотрим два участка этой цепи между точками А) и В): участок А$\mathcal{E}_1$В и участок В$\mathcal{E}_2$А. Оба этих участка содержат ЭДС и, следовательно, являются участками неоднородной цепи.

Применим к ним закон Ома (8.6б). Выберем направление обхода цепи по часовой стрелке.

Для участка А$\mathcal{E}_1$В запишем:

$$I \cdot r_1 = (\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_1. \qquad (1)$$

Для участка В$\mathcal{E}_2$А запишем:

$$I \cdot r_2 = (\varphi_B - \varphi_A) + \mathcal{E}_2. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим искомое выражение для разности потенциалов:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_2 r_1 - \mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}6 - 1{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}6 + 0{,}4} = 0{,}36\,B. \qquad (3)$$

Если бы источники имели одинаковые ЭДС и внутренние сопротивления, т.е. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$ и r_1=r_2=r, то, как видно из (3), искомая разность потенциалов оказалась бы равной нулю.

Ответ: *а) φ_A–φ_B=0,36В; б) φ_A–φ_B=0В.*

8.11 Батарея гальванических элементов замкнута на внешнее сопротивление R_1=10 Ом и дает ток I_1=3А. Если вместо сопротивления R_1 включить сопротивление R_2=20 Ом, то ток станет равным I_2=1,6А. Найти Э.Д.С. и внутреннее сопротивление батареи. *(Ответ: 34,3 В; 1,43 Ом).*

8.12 Два последовательно соединенных (в одном направлении) элемента с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$=2В и внутренними сопротивлениями r_1=1Ом и r_2=1,5 Ом замкнуты на внешнее сопротивление R=0,5 Ом. Найти разность потенциалов на зажимах каждого элемента. *(Ответ: U_{AB}=0,66В; U_{BC}=0В).*

8.13 Определить ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении R_1=50 Ом ток в цепи I_1=0,2А, а при R_2=110 Ом ток в цепи I_2=0,1А. *(Ответ: 1,2А).*

8.14 Какой длины медный провод диаметром 0,2мм надо взять, чтобы, используя его в качестве шунта, расширить в 10 раз предел измерения амперметра с внутренним сопротивлением r=0,8Ом? *(Ответ: 17,45см).*

8.15 Микроамперметр с внутренним сопротивлением r=500 Ом рассчитан на ток $I_{пр}$=100 мкА. Что нужно сделать, чтобы этот прибор можно было использовать для измерения напряжения до U=1В? Какова будет цена деления получившегося вольтметра, если полное число делений шкалы прибора равно 50? *(Ответ: $2\cdot10^{-2}$В).*

8.16 Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до 10А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление амперметра r_A=0,02 Ом и сопротивление шунта $r_ш$=5мОм? *(Ответ: 2 А).*

8.17 Гальванометр с внутренним сопротивлением 100 Ом рассчитан на максимальную силу тока I=$2\cdot10^{-5}$А. Найдите добавочное сопротивление, которое позволит использовать этот гальванометр в качестве вольтметра к термопаре с ЭДС $\mathcal{E}$=0,02В и внутренним сопротивлением 1Ом. *(Ответ:899 Ом).*

8.18 Сопротивление однородной проволоки R=36 Ом. Определите, на сколько N равных кусков разрезали проволоку, если после их параллельного соединения сопротивление оказалось равным R_1=1 Ом. *(Ответ: N=6).*

8.19 Определить общее сопротивление между точками А и В в цепи, представленной на рисунке 8.19, если R_1=1 Ом, R_2=3 Ом, R_3=R_4=R_6=2 Ом, R_5=4 Ом. *(Ответ: 1,2 Ом).*

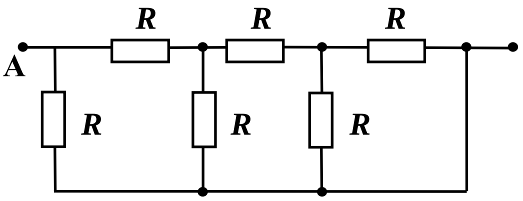


Рис.8.19

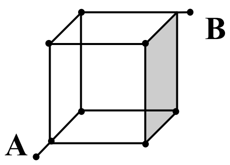


Рис.8.2

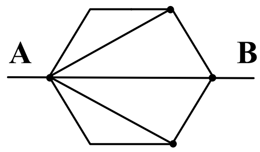


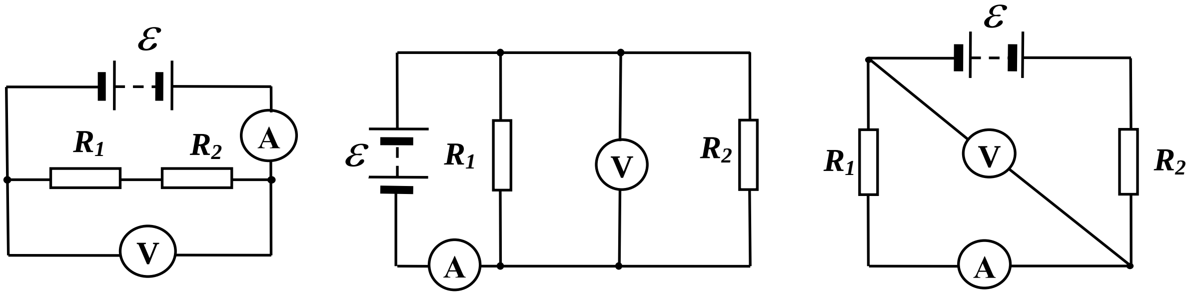
Рис. 8.21

8.20 Проволочный куб (рис. 8.20) составлен из проводников. Сопротивление каждого проводника, составляющего ребро куба R=1 Ом. Определить сопротивление проволочного куба, если он включен в электрическую цепь между точками А и В. *(Ответ:5/6 Ом).*

8.21 Участок электрической цепи (рис. 8.21) состоит из девяти проводников сопротивлением R каждый. Определите сопротивление всего участка между точками А и В. *(Ответ: 5R /11).*

8.22 В цепь, состоящую из источника ЭДС и резистора сопротивлением R=10 Ом, включают вольтметр, сопротивление которого R_V=500 Ом, один раз – последовательно резистору, другой раз – параллельно. Определите внутреннее сопротивление источника, если показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. *(Ответ: 0,2 Ом).*

8.23 Найти показания амперметра и вольтметра в следующих схемах (рис. 8.23 а,б,в). ЭДС батареи $\mathcal{E}$=110 В, сопротивление R_1=400 Ом, R_2=600 Ом, сопротивление вольтметра R_V=1 кОм. *(Ответ: а)I=0,22A; U=110B; б)I=0,57A; U=110B; в) I=0,088A; U=35,6B).*



а) б) в)

Рис. 8.23

8.24 *Вольтметр, подключенный к полюсам источника (рис.8.24) с внутренним сопротивлением r=1Ом, до замыкания цепи показывает 3В, после замыкания – 2,5В. Считая сопротивление вольтметра бесконечно большим и пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, найдите силу тока в цепи, сопротивление R_3 и заряд на пластинах конденсатора. Сопротивления резисторов R_1=4 Ом и R_2=6 Ом. Электроемкость конденсатора С=1мкФ.*

Дано: *ε =3В; U=2,5В; R_1=4 Ом; R_2=6 Ом; r=1 Ом; С=1мкФ=10^{-6}Ф.*

Найти: *I; R_3; q.*

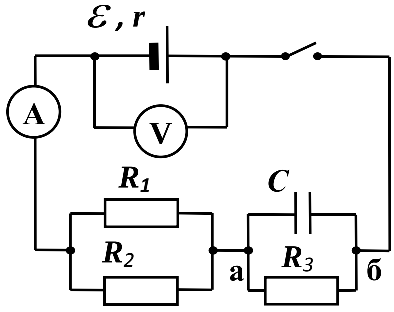


Рис.8.24

Решение

Поясним запись условия задачи. Из закона Ома для замкнутой цепи (8.6в) следует, что

$$\varepsilon = IR + Ir\,, \qquad (1)$$

где IR=U – падение напряжения на внешнем участке цепи; Ir – падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника. В случае замкнутой цепи вольтметр, подключенный к полюсам источника, показывает именно величину U, тогда можно записать:

$$U = \varepsilon - Ir\,. \qquad (2)$$

Из (2) видно, что вольтметр, подключенный к зажимам источника тока при разомкнутой внешней цепи (I=0), показывает значение ЭДС ε.

Из (2) найдем силу тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon - U}{r} = \frac{3 - 2{,}5}{1} = 0{,}5A.$$

Внешняя цепь сопротивлением R_Σ состоит из двух участков, соединенных последовательно. Первый участок содержит резисторы R_1 и R_2, соединенные параллельно, и имеет сопротивление:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (3)$$

*Второй участок **аб** состоит из параллельно включенных резистора R_3 и конденсатора С. Так как конденсатор в цепи постоянного тока пред-*

ставляет собой разрыв цепи (так как обладает бесконечно большим сопротивлением), то ток будет проходить только через резистор R_3.

Поэтому:

$$R_{аб} = R_3. \qquad (4)$$

Так как $U = I \cdot R_{\Sigma} = I(R_{12} + R_3)$,

то получим искомое выражение для R_3:

$$R_3 = \frac{U}{I} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2{,}5}{0{,}5} - \frac{4 \cdot 6}{4+6} = 2{,}6\ Ом.$$

Заряд на пластинах конденсатора равен:

$$q = CU_{AB}, \qquad (5)$$

где U_{AB} – разность потенциалов точек А и В.

Из закона Ома для участка цепи АВ (8.6а) запишем:

$$U_{AB} = IR_3. \qquad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим искомое выражение для заряда:

$$q = C \cdot I \cdot R_3 = 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}6 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ Кл.$$

Ответ: *I=0,5А; R_3=2,6 Ом; $q=1{,}3 \cdot 10^{-6}$Кл.*

8.25 В электрической цепи, схема которой изображена на рис. 8.25, ЭДС источника $\mathcal{E}$=6В, $R_1=2R_2$, $C_1=3C_2$. Найдите напряжение на конденсаторе C_3. Внутренним сопротивлением источника ЭДС можно пренебречь. *(Ответ: 2,5 В).*

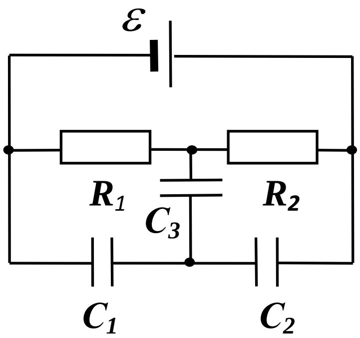


Рис.8.25

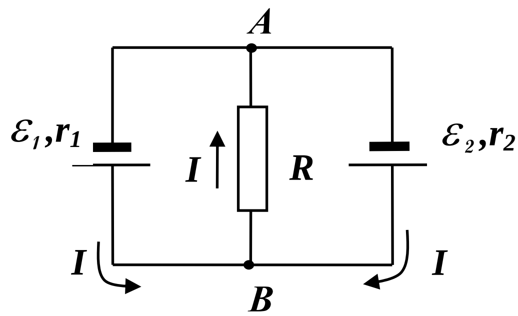


Рис.8.26

8.26 *Два источника ($\mathcal{E}_1$=2В; r_1=0,3Ом; $\mathcal{E}_2$=1,5В; r_2=0,2 Ом) включены в цепь с внешним сопротивлением R=2 Ом (рис.8.26). Найти силу тока в каждой из ветвей цепи.*

Дано: *$\mathcal{E}_1$=2В;r_1=0,3Ом; $\mathcal{E}_2$=1,5В;r_2=0,2Ом;R=2 Ом.*

Найти: *I_1; I_2; I_R.*

Решение

Силы токов в разветвленной цепи можно определить с помощью правил Кирхгофа. Для определения трех сил токов необходимо составить три уравнения.

Выберем направления токов, как указано на рисунке 8.26. Условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла A и B. Но составлять уравнение по 1-му правилу Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

Для узла B: $$I_1 + I_2 - I_R = 0. \qquad (1)$$

Недостающие два уравнения составляем по второму правилу Кирхгофа для замкнутых контуров $B\mathcal{E}_1AB$ и $BA\mathcal{E}_2B$:

$$-\mathcal{E}_1 = -I_1r_1 - I_RR; \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2r_2 + I_RR. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1)-(3), получим:

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} = \frac{2\cdot0{,}2 + 1{,}5\cdot0{,}3}{0{,}3\cdot0{,}2 + 2(0{,}3 + 0{,}2)} = 0{,}8A.$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - I_RR}{r_1} = \frac{2 - 0{,}8\cdot2}{0{,}3} = 1{,}3A; \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - I_RR}{r_2} = \frac{1{,}5 - 0{,}8\cdot2}{0{,}2} = -0{,}5A.$$

Знак «-» означает, что ток I_2 течет в направлении, обратному выбранному.
Ответ: *I_R= 0,8A; I_1=1,3A; I_2= 0,5A.*

8.27 Три источника с ЭДС $\mathcal{E}_1$=11В, $\mathcal{E}_2$=4 В и $\mathcal{E}_3$=6 В и три резистора с сопротивлениям R_1=5 Ом, R_2=10 Ом и R_3=2 Ом соединены, как показано на рис. 8.27. Внутреннее сопротивление источников пренебрежимо мало. Определить силу тока в резисторах. *(Ответ: I_1=0,8A; I_2=0,3A; I_3=0,5A).*

8.28 Электрическая цепь собрана так, как показано на рисунке 8.28. ЭДС батареи $\mathcal{E}_1$=12В, а ее внутреннее сопротивление r_1=1 Ом. Какова должна быть ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$ при ее внутреннем сопротивлении r_2=3 Ом, чтобы через сопротивление R не проходил ток? (*Ответ: $\mathcal{E}_2$ =36В).*

8.29 Найти токи I_i в отдельных ветвях мостика Уитстона и сопротивление R_4 (рис. 8.29) при условии, что ток через гальванометр $I_г$=0. Сопротивления R_1=30 Ом, R_2=45Ом, R_3=200 Ом, ЭДС источника $\mathcal{E}$=2В, внутреннее сопротивление источника r пренебрежимо мало. *(Ответ: I_1=I_2=26мА; I_3=I_4=4мА; R_4=300 Ом).*

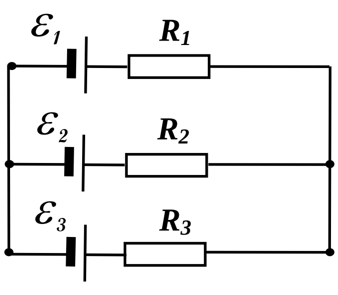


Рис. 8.27

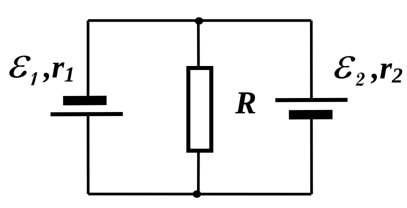


Рис.8.28

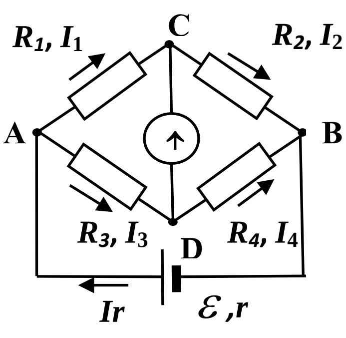


Рис.8.29

8.30 Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. Э.Д.С. каждого элемента $\mathcal{E}$=1,2В, внутреннее сопротивление r_i=0,2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R=1,5 Ом. Найти силу тока во внешней цепи. *(Ответ:2А).*

8.31 Четыре батареи с Э.Д.С. $\mathcal{E}_1$=55В, $\mathcal{E}_2$=10В, $\mathcal{E}_3$=30В, $\mathcal{E}_4$=15В и внутренними сопротивлениями r_1=0,3 Ом; r_2=0,4 Ом; r_3=0,1 Ом; r_4=0,2 Ом включены в цепь (рис. 8.31). Найдите токи в каждой ветви цепи, если R_1=9,5 Ом; R_2=19,6 Ом; R_3=4,9 Ом.
(Ответ: I_1=1,28А; I_2=1,85А; I_3=0,57А).

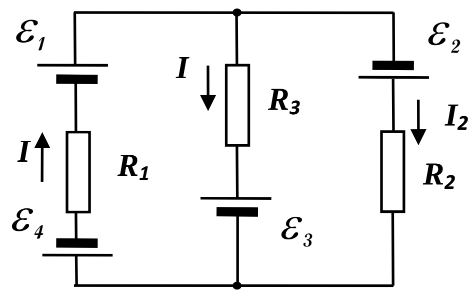


Рис. 8.31

8.32 Толстая и тонкая проволоки из одного материала, имеющие одинаковую длину, соединены последовательно (параллельно) и подключены к источнику напряжения. Какая из них сильнее нагреется?

8.33 Нагреватель электрической кастрюли имеет 2 одинаковые секции с сопротивлением R=20 Ом каждая. Через какое время τ закипит объем V=2,2л воды, если: а) включена 1 секция; б) две секции включены последовательно; в) обе секции включены параллельно. Начальная температура воды t_0=16^{0}С, напряжение в сети U=110 В, КПД нагревателя η=85%.
(Ответ: а) 25мин; б) 50 мин; в) 12,5мин).

8.34 Объем воды V=4,5л можно вскипятить, затратив электрическую энергию W=0,5кВт·ч. Начальная температура воды t_0=23^{0}С. Найти КПД η нагревателя. *(Ответ: 80%).*

8.35 Ток в проводнике сопротивлением R=12 Ом равномерно убывает от I_0=5А до I=0 в течение времени τ=10с. Какое количество теплоты выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени? *(Ответ: 1 кДж).*

8.36 Свинцовая проволочка диаметром d=1мм в плавком предохранителе расплавляется при силе тока не меньшей I_1=8А. При какой силе тока I_2 расплавится проволочка диаметром d_2=2мм? Считать проволочку достаточно длинной (для того, чтобы можно было пренебречь охлаждением у ее зажимов). Считать, что количество теплоты, выделяемое проволочкой в окружающее пространство, прямо пропорционально площади поверхности проволочки. *(Ответ: 22,6А).*

8.37 Имеются три 110-вольтовых электрических лампочки, мощности которых P_1=P_2=40Вт и P_3=80 Вт. Как надо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети U_0=220В? Начертить схему. Найти токи I_1 и I_2 и I_3, текущие через лампочки при нормальном накале. *(Ответ: I_1=I_2=0,365А; I_3=0,73А).*

8.38 При силе тока I_1=3А во внешней цепи источника тока выделяется мощность P_1 =18Вт, а при силе тока I_2=1А соответственно P_2=10 Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. *(Ответ:12В; 2Ом).*

8.39 Батарея с ЭДС $\mathcal{E}$=10 В (рис. 8.39) и внутренним сопротивлением r =1 Ом имеет к.п.д. η=0,8. Падения напряжения на сопротивлениях R_1 и R_4 равны соответственно U_1=4 В и U_4=2 В. Какой ток I показывает амперметр? Найти падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2. *(Ответ: I=2А; U_2=2В).*

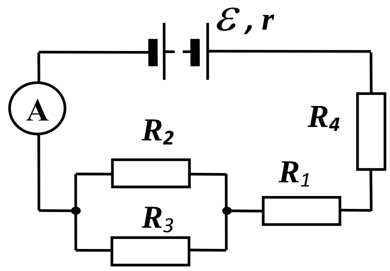


Рис.8.39

8.40 Источник ЭДС вначале замыкают на резистор сопротивлением R_1=16 Ом, а затем – на резистор сопротивлением R_2=60 Ом, при этом в обоих случаях выделяется одинаковое количество теплоты. Определите внутреннее сопротивление r источника ЭДС. *(Ответ:31 Ом).*

8.41 В электрическую цепь (рис. 8.41) включен источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ =100 В и внутренним сопротивлением r =36 Ом. Вычислить сопротивление внешней цепи (нагрузки) и выделяющуюся в ней мощность, если КПД источника тока η=50%.*(Ответ: 60 Ом; 69Вт).*

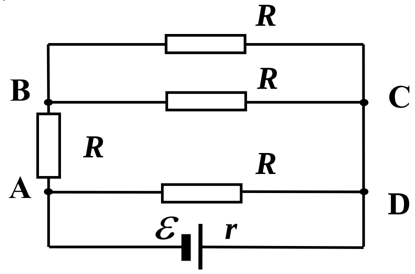


Рис. 8.41

8.42 От батареи с $\mathcal{E}$=500В требуется передать энергию на расстояние L=2,5км. Потребляемая мощность P=10 кВт. Найти минимальные потери ΔP мощности в сети, если диаметр медных подводящих проводов d=1,5см. (Указание: длина провода $2L$). *(Ответ: 103,8 Вт).*

8.43 *Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E}$=4,5В и внутренним сопротивлением r=1,2 Ом, включен в электрическую цепь с внешним сопротивлением R. С каким КПД работает аккумулятор, если в цепи течет ток I=2,5А? Какую максимальную полезную мощность может дать аккумулятор в нагрузку? Найдите КПД аккумулятора при этих условиях?*

Дано: $\mathcal{E}$ *=4,5В; r=1,2 Ом; I=2,5А.*

Найти: η; P^*; η^*.

Решение

Согласно (8.12) КПД источника η есть отношение полезной мощности (выделяемой на внешнем сопротивлении) ко всей мощности, выделяемой аккумулятором:

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}} = \frac{4{,}5 - 2{,}5 \cdot 1{,}2}{4{,}5} = 0{,}33.$$

Максимальную полезную мощность источник дает, если его внутреннее сопротивление r равно сопротивлению нагрузки:

$$r = R^*. \qquad (1)$$

При таком сопротивлении R^* ток в цепи равен:

$$I^* = \frac{\mathcal{E}}{R^* + r} = \frac{\mathcal{E}}{2r}. \qquad (2)$$

Подставив (1) и (2) в (8.11), получим искомое выражение для максимальной полезной мощности:

$$P^* = \left(I^*\right)^2 \cdot R = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{\left(4{,}5\right)^2}{4 \cdot 1{,}2} = 4{,}2\,Вт.$$

Тогда КПД источника:

$$\eta^* = \frac{\mathcal{E} - I^* r}{\mathcal{E}} = 0{,}5 \cdot$$

Ответ: *$\eta \approx 33\%$; $P^* \approx 4{,}2$ Вт; $\eta^* = 50\%$.*

8.44 Определите ЭДС батареи, внутреннее сопротивление которой r=0,5 Ом, если при нагрузке R=2 Ом она имеет полезную мощность P=4,5 Вт. Можно ли подобрать такое сопротивление нагрузки, чтобы полезная мощность, даваемая батареей, увеличилась в 2 раза? *(Ответ:3,75В; нельзя).*

8.45 Батарея состоит из 5 последовательно соединенных элементов. Каждый элемент имеет ЭДС $\mathcal{E}$ =1,5В и внутреннее сопротивление r=0,3 Ом. При какой нагрузке полезная мощность батареи будет максимальной? Какой при этом будут ток в нагрузке? Какую полную мощность дает в это время батарея? *(Ответ: 1,5 Ом; 2,5А; 18,75 Вт).*

8.46 Батарея элементов при замыкании на сопротивление R=5 Ом дает ток I=1А; ток короткого замыкания равен $I_{кз}$= 6А. Определите наибольшую полезную мощность, которую может дать батарея. Какое количество теплоты выделится при этом в нагрузке в единицу времени**?** *(Ответ:18Вт;9 Дж).*

§9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА ИНДУКЦИЯ И НАПРЯЖЕННОСТЬ. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

✓ Сила Ампера:

$$d\vec{F} = I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}], \qquad (9.1)$$

где $d\vec{F}$ – сила, действующая на элемент тока $Id\vec{l}$, помещенный в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, или в скалярном виде (модуль силы):

$$dF = IB \cdot dl \cdot sin\alpha, \qquad (9.1а)$$

где α– угол между элементом тока $Id\vec{l}$ и вектором $\vec{B}$.

✓ Сила взаимодействия двух прямых бесконечных проводников с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии R друг от друга, приходящаяся на элемент длины dl:

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{R} dl, \qquad (9.2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; μ – относительная магнитная проницаемость среды.

- ✓ Магнитный момент контура с током:

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}, \qquad (9.3)$$

где S – площадь контура с током; $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности, натянутой на контур.

- ✓ Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \qquad (9.4)$$

или в скалярном виде (модуль механического момента):

$$M = p_m \cdot B \cdot sin\alpha, \qquad (9.4а)$$

где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности контура и вектором $\vec{B}$.

- ✓ Закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \qquad (9.5)$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока $Id\vec{l}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока к точке наблюдения.

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot sin\alpha}{r^2}, \qquad (9.5а)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

- ✓ Напряженность магнитного поля в вакууме:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \qquad (9.6)$$

- ✓ Связь между магнитной индукцией $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля для однородной изотропной среды с относительной магнитной проницаемостью μ:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \qquad (9.7)$$

- ✓ Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i, \qquad (9.8)$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ – магнитные индукции складываемых полей.

- ✓ Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током I на расстоянии R от оси проводника:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}. \qquad (9.9)$$

- ✓ Магнитная индукция в центре кругового витка с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \cdot \frac{I}{R}, \qquad (9.10)$$

где R – радиус проводника, I – сила тока в проводнике.

- ✓ Магнитная индукция на оси бесконечно длинного соленоида:

$$B = \mu\mu_0 nI\ , \qquad (9.11а)$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в соленоиде.

Магнитная индукция на оси соленоида конечной длины:

$$B = \frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right), \qquad (9.11б)$$

где β_1 и β_2 – углы между осью соленоида и радиус-векторами, проведенными из рассматриваемой точки к концам соленоида.

- ✓ Сила Лоренца:

$$\vec{F_л} = q \cdot [\,\vec{\upsilon}, \vec{B}\,]\ , \qquad (9.12)$$

где $\vec{F}_л$ – сила, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{\upsilon}$, или в скаляром виде (модуль силы):

$$F_л = q \cdot \upsilon \cdot B \cdot sin\alpha\ , \qquad (9.12а)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

- ✓ Формула Лоренца:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\,\vec{\upsilon}, \vec{B}\,]\ , \qquad (9.13)$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на движущийся заряд q, помещенный в электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле индукцией $\vec{B}$.

- ✓ Поперечная разность потенциалов (ЭДС Холла), возникающая на гранях пластины с током I, находящейся в магнитном поле, ориентированном перпендикулярно к направлению тока:

$$E_H = R_H \cdot \frac{IB_n}{d}, \qquad (9.14)$$

где B_n – индукция магнитного поля; d – толщина пластины; $R_H = \dfrac{1}{ne}$ – постоянная Холла, n – концентрация свободных носителей заряда.

- ✓ Циркуляция векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ (в вакууме) по произвольному замкнутому контуру L (закон полного тока):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k\ , \qquad (9.15а)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \sum_{k=1}^{n} I_k\ , \qquad (9.15б)$$

где $d\vec{l}$ – вектор элемента длины контура, направленный вдоль обхода контура; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром.

Вопросы для самоконтроля

1. Что позволяет найти закон Био-Савара-Лапласа?
2. Как определяется направление вектора магнитной индукции?
3. Что такое линия магнитной индукции?
4. Связь между напряженностью и магнитной индукцией.
5. Какое магнитное поле называется однородным?
6. С помощью линий магнитной индукции изобразите магнитное поле: прямого провода с током, кольца с током, соленоида и тороида.
7. Как магнитная стрелка ориентируется в магнитном поле?
8. Что называется магнитным моментом контура с током?
9. Как взаимодействуют между собой параллельные проводники с током?
10. По какому правилу можно определить направление действия силы Ампера?
11. Что называется силой Лоренца? Чему равен модуль силы Лоренца?
12. По какой траектории будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле под углом 90^0 к вектору $\vec{B}$?
13. При каких условиях частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали?
14. При каких условиях в пластине с током, помещенной в магнитное поле возникает поперечная разность потенциалов (ЭДС Холла)?

Рекомендации к решению задач

1. Сделайте схематический чертеж, на котором, в зависимости от условия, укажите проводник (контур) с током или движущуюся частицу (обозначив вектор начальной скорости частицы).
2. Укажите направление вектора индукции (напряженности) магнитного поля в заданной точке.
3. Отметьте углы между направлением вектора магнитной индукции и отдельным элементом проводника (контура) $d\vec{l}$ или вектором начальной скорости частицы.

Задачи данного раздела можно разделить на 3 группы:

1) задачи на определение индукции (напряженности) магнитного поля, создаваемого проводником (контуром) с током в выбранной точке;
2) задачи на определение сил, действующих на проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле;
3) задачи о движении заряженных частиц в магнитном поле, а также в скрещенных электрическом и магнитном полях.

При решении задач 1-ой группы:

1. Если поле в указанной точке создается несколькими проводниками, воспользуйтесь принципом суперпозиции.
2. Для вычислений используйте формулу (9.5а), предварительно определив пределы интегрирования.
3. Если для решения задачи необходимо использовать теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$, выберите контур интегрирования.

При решении задач 2-ой группы:

1. Используя правило левой руки, определите направление сил, действующих на каждый элемент тока в магнитном поле, и укажите вектора этих сил (сила Ампера) на чертеже.
2. Если задача сводится к определению сил, действующих на отдельные проводники контура (или вращающих моментов, создаваемых этими силами), то запишите уравнения для сил (или моментов сил) для каждого элемента тока и найдите из них искомые величины.
3. Если в задаче рассматривается равновесие проводника (контура) с током в магнитном поле, то кроме силы Ампера, нужно указать все остальные силы, действующие на проводник (контур) и записать условие его равновесия.

При решении задач 3-ой группы:

1. Укажите направление силовых линий магнитного поля, скорость и знак заряда движущейся частицы.
2. Если скорость частицы направлена под углом к линиям индукции магнитного поля, ее следует разложить на две составляющие (нормальную и касательную вектору $\vec{B}$).
3. Укажите силы, действующие на заряженную частицу. Как правило, действие силы тяжести не учитывается, так как она ничтожно мала по сравнению с силами электромагнитного поля. При нахождении направления силы Лоренца обратите внимание на знак заряда частицы.
4. Силы, действующие на заряженную частицу, разложите на нормальную и касательную составляющие. Для каждой составляющей сил запишите уравнение динамики материальной точки, затем расшифруйте силы с помощью формул электростатики и формул (9.12), (9.13). При необходимости добавьте кинематические уравнения.

Задачи

9.1 *По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи I_1=10А и I_2=15 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводниками d=10см. а) Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной от обоих проводников на одинаковое расстояние R=10см. б) Как изменится величина магнитной индукции, если токи в проводниках будут течь в одинаковых направлениях?*

Дано: *I_1=10А; I_2=15 А; d=10см=0,1м; R=10см=0,1м.*
Найти: *B.*

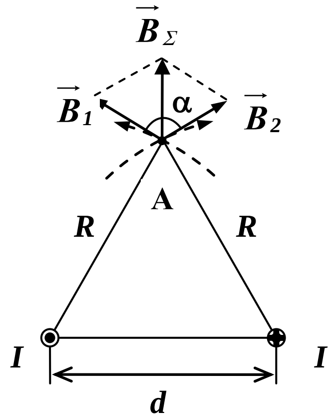


Рис.9.1.

Решение

Пусть токи направлены перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 9.1), так что ток I_1 направлен к нам, а ток I_2 - от нас. Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены по касательной к линиям магнитной индукции полей(на рис. 9.1 изображены пунктиром), создаваемых, соответственно, проводниками с токами I_1 и I_2. Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке А равна: $\vec{B}_\Sigma = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Модуль вектора $\vec{B}_\Sigma$ найдем по теореме косинусов:

$$B_\Sigma = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(\pi - \alpha)}, \qquad (1)$$

где $B_1 = \dfrac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi R}$; $B_2 = \dfrac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi R}$; $\alpha = 120^0$.

Подставив выражения для B_1, B_2 и $\cos\alpha$ в (1), найдем искомое выражение для B_Σ: $B_\Sigma = \dfrac{\mu\mu_0}{2\pi R}\cdot\sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cdot\cos 60^0}$.

$$B_\Sigma = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1}\cdot\sqrt{100 + 225 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\frac{1}{2}} = 2{,}64\cdot 10^{-5}\,Тл.$$

Ответ: *B=2,64·10^{-5}Тл.*

Пункт б) задачи рекомендуется рассмотреть самостоятельно.

9.2 По двум бесконечно длинным параллельным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 5см друг от друга, текут токи I_1=I_2=10А. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами в точке, лежащей посередине между проводниками, для случаев: а) токи текут в одном направлении; б) токи текут в противоположных направлениях. *(Ответ: а) 0; б) 1,6·10^{-4}Тл).*

9.3 Из проволоки длиной *l* =1м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток *I* =10А. Найти напряженность *H* магнитного поля в центре рамки. *(Ответ:35,8 А/м).*

9.4 Два бесконечно длинных прямых проводника, по которым текут токи I_1=80А и I_2=60А, скрещены под прямым углом (рис.9.4). Расстояние между проводниками *d*=10см. Чему равна магнитная индукция *B* в точке А, одинаково удаленной от обоих проводников? *(Ответ: 4·10^{-4}Тл).*

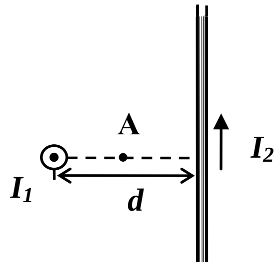


Рис. 9.4

9.5 Ток I =20А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением S =1,0мм^2, создает в центре кольца напряженность магнитного поля H =178 А/м. Какая разность потенциалов U приложена к концам проволоки, образующей кольцо? Удельное сопротивление меди ρ =1,7·10^{-5} Ом·м. *(Ответ: 0,12В).*

9.6 Определите индукцию магнитного поля на оси тонкого проволочного кольца радиусом R=5см, по которому течет ток I =1А, в точке А, расположенной на расстоянии d =10см от центра кольца. *(Ответ: 112 мкТл).*

9.7 В центре витка радиуса r =30см находится компас, установленный в горизонтальной плоскости. При отсутствии тока в контуре плоскость витка параллельна к оси магнитной стрелки. Если по витку пропустить ток I =5А, стрелка поворачивается на угол φ=30^0. Определите горизонтальную составляющую индукции и напряженности магнитного поля Земли. *(Ответ: 1.82·10^{-5}Тл; 14,5 А/м).*

9.8 Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром d=0,5мм намотан так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова напряженность магнитного поля внутри соленоида при силе тока I=4А? Толщиной изоляции пренебречь. *(Ответ: 8·10^3 А/м).*

9.9 Из проволоки диаметром d=1мм надо намотать соленоид, внутри которого должна быть напряженность магнитного поля H=24кА/м. По проволоке можно пропускать предельный ток I=6А. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.
(Ответ: 4 слоя).

9.10 *По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток I=1А. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора В, магнитную индукцию в точке А, расположенной на расстоянии r=10см от проводника.*

Дано: *I=1A; r=10см=0,1м.*

Найти: *B.*

Решение

Согласно условию задачи, воспользуемся теоремой о циркуляции вектора В (9.15а). Так как $\left|\vec{B}\right| = const$, $\vec{B} \perp d\vec{l}$ *и точка А находится на расстоянии r от проводника, то в качестве контура интегрирования выберем окружность радиусом r.*

Тогда из (9.15а) получим:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I , \qquad (1)$$

где L=2πr – длина окружности, вдоль которой проводится интегрирование.

Подставив в (1) пределы интегрирования, получим искомое выражение для модуля вектора В:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} = 2 \cdot 10^{-6}\,Тл .$$

Ответ: *B=2мкТл.*

9.11 Определить циркуляцию вектора магнитной индукции для замкнутых контуров, изображенных на рис.9.11, если сила тока в обоих проводниках I=2А. *(Ответ:1)2,51·10^{-6} Тл; 2) 5,02·10^{-6} Тл; 3) 0).*

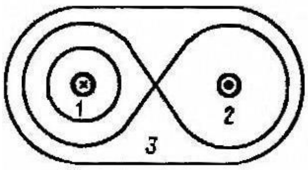


Рис.9.11

9.12 Диаметр D тороида по средней линии равен 30см, в поперечном сечении тороид имеет круг диаметром d=10см (рис. 9.12). По обмотке тороида, содержащей N=2000 витков, течет ток I=5А. Пользуясь законом полного тока, определить максимальное и минимальное значения магнитной индукции B в тороиде. *(Ответ: 0,02 Тл; 0,01 Тл).*

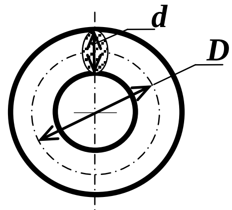


Рис.9.12.

9.13 *По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам в вакууме, находящимся на расстоянии d=20см друг от друга, в одинаковых направлениях текут токи I_1=10А и I_2=20А. а) Определите, с какой силой взаимодействуют отрезки этих проводников длиной 1,5 м; б) Как изменится сила взаимодействия, если во втором проводнике изменить направление тока?*

Дано: *l=1,5м; d=20см=0,2м; I_1=10А;*
I_2=20 А; $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$Гн/м.
Найти: *F.*

Решение

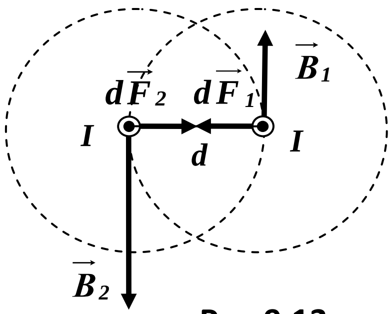


Рис.9.13

Согласно выражению (9.1), на каждый элемент проводника длиной dl с током I_2 действует в магнитном поле, создаваемым током I_1, сила dF_1. Ее направление определено по правилу левой руки и указано на рис.9.13, а модуль может быть вычислен по формуле (9.1а):

$$dF_1 = I_2 B_1 \cdot dl \cdot sin\alpha\,. \qquad (1)$$

Аналогичным образом можно определить модуль и направление силы dF_2, действующей на элемент проводника dl с током I_2:

$$dF_2 = I_1 B_2 \cdot dl \cdot sin\alpha\,. \qquad (2)$$

Модули индукций магнитных полей B_1 и B_2 определяются формулой (9.9):

$$B_1 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\cdot\frac{I_1}{d}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\cdot\frac{I_2}{d}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (3) в (1) и (2),и учтя, что угол $\alpha=90^0$, получим следующие выражения для модулей сил F_1 и F_2:

$$dF_1 = dF_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\cdot dl = dF\,. \qquad (4)$$

Проинтегрировав выражение (4) от 0 до l и подставив в полученное выражение данные из условия задачи, вычислим искомую силу взаимодействия токов:

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_0^l dl = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\cdot l = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 20}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2}\cdot 1{,}5 = 3\cdot 10^{-4}\,H\,.$$

Ответ: *$F=3\cdot10^{-4}$Н.* *Ответ на вопрос б) получите самостоятельно.*

9.14 По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток I_1 =10А. Под ним на расстоянии R =1,5см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток I_2 =1,5 А. Определить, какова должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Провода считать бесконечно длинными. Плотность алюминия ρ=2,7г/см^3. *(Ответ: $7{,}56\cdot10^{-9}$м^2).*

9.15 Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии d_1=10см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи I_1=20А и I_2=30А. Какую работу A_l (на единицу длины проводника) надо совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния d_2=20см? *(Ответ: $8{,}3\cdot10^{-5}$ Дж/м).*

9.16 По витку радиусом r =5см течет ток I=10А. Чему равен магнитный момент p_m кругового тока? *(Ответ: $7{,}86\cdot10^{-2}$ А·м^2).*

9.17 Очень короткая катушка содержит N=1000 витков тонкого провода. Катушка имеет квадратное сечение со стороной a=10см. Найти магнитный момент катушки при токе I=1А. *(Ответ: 10А·м^2).*

9.18 *В однородном магнитном поле с индукцией B=0,5Тл находится прямоугольная рамка длиной a=8см и шириной b=5см, содержащая N=100 витков тонкой проволоки, по которой течет ток I=1А. Плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определите: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент M_1, действующий на рамку; 3) вращающий момент M_2, действующий на рамку, если плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции.*

Дано: *B=0,5Тл; a=8см=$8\cdot10^{-2}$м;*
b=5см=$5\cdot10^{-2}$м; N=100; I=1А.

Найти: *1) p_m; 2) M_1; 3) M_2.*

Решение

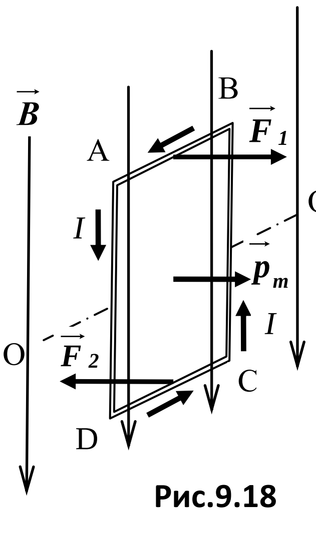


Рис.9.18

Плоскость рамки параллельна линиям индукции магнитного поля. Стороны AD и BC рамки параллельны вектору индукции магнитного поля, и, согласно (9.1а), сила Ампера на них не действует, так как $\sin\alpha=0$.

Так как стороны AB и CD перпендикулярны вектору $\vec{B}$, то на эти две стороны действуют равные по модулю и противоположные по *направлению силы Ампера F_1 и F_2 (направление сил определяется по правилу левой руки).*

Таким образом, приложенная к рамке пара сил создает механический (вращающий) момент $\vec{M}$, стремящийся повернуть рамку вокруг оси OO.*

Модуль вращающего момента можно определить по формуле (9.4а):

$$M = p_m \cdot B \cdot sin\alpha, \qquad (1)$$

где p_m – модуль магнитного момента рамки с током, α – угол между направлением вектора $\vec{B}$ и нормали к плоскости витка (совпадающей с направлением p_m).

Так как, согласно условию задачи, $\alpha=90^0$, то вращающий момент принимает максимальное значение.

Численное значение магнитного момента можно определить, используя формулу (9.3) и учтя, что рамка состоит из N витков:

$$p_m = I \cdot S \cdot N = I \cdot a \cdot b \cdot N = 1 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0{,}4 A \cdot м^2. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим численное значение для вращающего момента:

$$M_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}2 H \cdot м.$$

***Ответ:** 1) p_m=0,4 А·м^2; 2) M_1=0,2 Н·м.*

Ответ на вопрос 3) данной задачи предлагается найти самостоятельно.

9.19 Из проволоки длиной l=20см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B=0,1Тл, если при этом по каждому из них течет ток I =2А. Плоскость каждого контура составляет угол α=45^0 с направлением линий индукции магнитного поля. *(Ответ: 3,5·10^{-4} Н·м; 4,5·10^{-4} Н·м).*

9.20 *Электрон, ускоренный разностью потенциалов U=6кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом α=30^0 к линиям магнитной индукции и начинает двигаться по винтовой линии. Индукция магнитного поля B=1,3·10^{-2} Тл. а) Найти радиус r витка и шаг d винтовой линии. Силой тяжести, действующей на электрон, пренебречь. б) Чем будет отличаться траектория электрона, влетевшего в это же поле с такой же скоростью перпендикулярно и параллельно линиям поля? (m_e=9,1·10^{-31}кг, e=1,6·10^{-19} Кл).*

***Дано:** U=6кВ=6·10^{3}В; α=30^0; B=1,3·10^{-2} Тл; m=9,1·10^{-31}кг; e=1,6·10^{-19} Кл.*

Найти: r ; h.

Решение

При прохождении электроном ускоряющей разности потенциалов U работа сил электростатического поля идет на сообщение электрону кинетической энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = eU, \qquad (1)$$

откуда скорость электрона: $$\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (2)$$

Разложим скорость электрона на две составляющие: параллельную линиям магнитной индукции и перпендикулярную им (рис.9.20):

$$\upsilon_x = \upsilon \cdot \cos\alpha, \quad \upsilon_y = \upsilon \cdot \sin\alpha.$$

Благодаря наличию составляющей скорости υ_y *на электрон действует сила Лоренца (9.12), перпендикулярная вектору магнитной индукции и* υ_y *составляющей скорости частицы.*

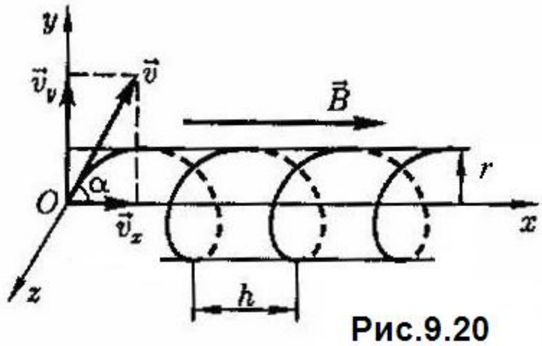


Рис.9.20

Под действием силы Лоренца электрон движется в плоскости, лежащей перпендикулярно магнитному полю по окружности, радиус которой, согласно (9.12а) определяется условием:

$$\frac{m(\upsilon \cdot \sin\alpha)^2}{r} = e\upsilon B \cdot \sin\alpha, \qquad (3)$$

так как сила Лоренца играет роль центростремительной силы.

Подставив (2) в (3) и выразив r, получим искомое выражение для радиуса витка:

$$r = \frac{m\upsilon \cdot \sin\alpha}{eB} = \frac{\sin\alpha\sqrt{2mU/e}}{B} = \frac{0{,}5}{1{,}3 \cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^{3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 10^{-2}\,м.$$

Вдоль направления вектора B сила Лоренца не действует, поэтому электрон движется равномерно со скоростью υ_x.

В результате сложения двух движений электрон движется по винтовой линии радиусом ***r*** *и шагом винта* ***h*** *(расстояние между соседними витками):*

$$h = T \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha, \qquad (4)$$

где T – период оборота электрона по спирали:

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon \cdot \sin\alpha}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4) получим искомое выражение для h:

$$d = 2\pi r \cdot ctg\alpha = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{3} = 0{,}11м.$$

Ответ: $r=10^{-2}$*м; d=0,11м.*

Ответ на вопрос б) данной задачи найдите самостоятельно.

9.21 Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле с индукцией B, перпендикулярное к скорости зарядов. Чем будут отличаться траектории заряженных частиц? Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона? (m_P=1,67·10^{-24}кг, m_e=9,11·10^{-31}кг). *(Ответ: 42,9).*

9.22 Для определения удельного заряда электрона электронно-лучевую трубку с отключенной управляющей системой помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное скорости движения электронов. При этом след пучка электронов на экране смещается на d=2,5см. Определите e/m, используя следующие данные: расстояние от ускоряющего анода до экрана l=30см, скорость электронов υ=8,8·10^8 см/с и напряженность магнитного поля H=20,5 А/м. *(Ответ: ≈1,8·10^{11} Кл/кг).*

9.23 Магнитное поле напряженностью H=8кА/м и электрическое поле напряженностью E=1кВ/м направлены одинаково. Электрон влетает в электромагнитное поле со скоростью υ=10^{5}м/с. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_t и полное a ускорения электрона. Задачу решить, если скорость электрона направлена а) параллельно направлению электрического поля; б) перпендикулярно к направлению электрического поля. *(Ответ: а) 0; 1,7·10^{12} м/с^2; б) 2,5·10^{12} м/с^2; 0).*

9.24 Линии напряженности однородного электрического поля E=300 В/м и линии индукции магнитного поля B =10^{-4} Тл взаимно перпендикулярны. Какой должна быть скорость электрона по модулю и направлению, чтобы движение его в этих полях было прямолинейным и равномерным? *(Ответ: 3·10^{6}м/с).*

9.25 Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U=104В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (E=10 кВ/м) и магнитное (B=0,1Тл) поля. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.
(Ответ: 4,8·10^7 Кл/кг).

9.26 Через сечение металлической пластинки толщиной d=0,1мм пропускается ток I=10А. Пластинка с током помещена в магнитное поле с напряженностью H=8·10^4 А/м, перпендикулярное направлению тока и ребру пластинки. Определите возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов, если число электронов в единице объема пластинки n=9·10^{27} м$^{-3}$. *(Ответ: 7·10^{-7} В).*

§10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ
МАГНИТНЫЙ ПОТОК. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ИНДУКТИВНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

✓ Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ (магнитный поток)

– через элементарную площадку dS:

$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B_n \cdot dS \; ; \tag{10.1а}$$

– через произвольную замкнутую поверхность S:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_S B_n \cdot dS \, , \tag{10.1б}$$

где $d\vec{S} = dS\cdot\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке S; $B_n = B\cdot cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали; α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$.

✓ Элементарная работа силы Ампера по перемещению проводника (контура) с током в однородном магнитном поле:

$$dA = I\cdot d\Phi \, , \tag{10.2}$$

где Φ – магнитный поток, пересекаемый движущимся проводником или пронизывающий поверхность S, ограниченную контуром.

✓ Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} \, , \tag{10.3}$$

где ε_i – ЭДС электромагнитной индукции, возникающая в замкнутом проводящем контуре, при пересечении им линий магнитной индукции; N – число витков контура, $d\Phi/dt$ – скорость изменения со временем магнитного потока Φ, охватываемого каждым из витков.

✓ ЭДС самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем:

$$\varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt} \, , \tag{10.4}$$

где L – индуктивность контура, dI/dt – скорость изменения силы тока в контуре.

✓ Магнитный поток, создаваемый током I в контуре индуктивностью L:

$$\Phi = L\cdot I \, . \tag{10.5}$$

✓ Индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2 S}{l} \, , \tag{10.6}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь поперечного сечения.

✓ Сила тока при размыкании (а) и замыкании (б) цепи, содержащей источник тока, резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L:

$$а)\, I = I_0 \cdot exp\left(-{t}/{\tau}\right), \qquad (10.7а)$$

где I_0 –сила тока в момент размыкания цепи (при t=0), $\tau = \frac{L}{R}$– время релаксации;

$$б)\, I = I_0 \cdot \left(1 - exp\left(-{t}/{\tau}\right)\right), \qquad (10.7б)$$

где I_0 – установившаяся сила тока в цепи (при $t \to \infty$).

- ✓ Энергия магнитного поля, запасаемая контуром индуктивностью L, по которому течет ток I:

$$W = {LI^2}/{2}. \qquad (10.8)$$

- ✓ Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида:

$$\omega = {W}/{V} = {B^2}/{2\mu_0\mu} = {\mu_0\mu H^2}/{2} = {BH}/{2}, \qquad (10.9)$$

где W – энергия однородного магнитного поля; V – объем соленоида; B – индукция магнитного поля; H – напряженность магнитного поля.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется магнитным потоком?
2. В чем отличие индукционного электрического поля от электростатического?
3. В чем заключается явление электромагнитной индукции? При каких условиях в замкнутом контуре возникает электрический ток?
4. Как формулируется правило Ленца? Какова связь правила Ленца с законом сохранения энергии?
5. Что называется токами Фуко?
6. Что называется индуктивностью контура? Как определяется единица индуктивности?
7. В чем заключается явление самоиндукции? От чего зависит ЭДС самоиндукции?

Рекомендации к решению задач

Следует помнить:

1. что в явлении электромагнитной индукции магнитный поток сквозь контур может изменяться как при движении контура или отдельных его участков, так и при изменении во времени магнитного поля;
2. в случае соленоида поток $\Phi = N\Phi_1$, то есть является полным магнитным потоком (потокосцеплением), равным сумме потоков Φ_1, проходящих через каждый из N витков соленоида;
3. возникновение ЭДС индукции в замкнутом контуре приводит к появлению индукционного тока, направление которого определяется согласно правилу Ленца;

4. ЭДС самоиндукции появляется в контуре при изменении магнитного потока, создаваемого индукционным током самого контура.

Задачи

10.1. Соленоид без сердечника содержит N=500 витков, имеет длину l=0,6м и диаметр d=4см. Определите магнитный поток Φ, пронизывающий площадь поперечного сечения соленоида, если сила тока I в обмотке равна 1А. *(Ответ: 1,3·10⁻⁶Вб).*

10.2. В магнитном поле индукция которого B=0,1 Тл вращается стержень длиной l=10см с частотой ν=5,3с$^{-1}$. Ось вращения, проходящая через один из концов стержня, параллельна направлению магнитного поля. Найдите магнитный поток Φ, пересекаемый стержнем за время t=1 мин. *(Ответ: 1 Вб).*

10.3 *В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I=50А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной l=65см параллельны проводу, а расстояние* ***d*** *от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине* ***a****. Каков магнитный поток, пронизывающий рамку?*

Дано: *I=50А; l=65см=0,65м; d=a.*

Найти: *Ф.*

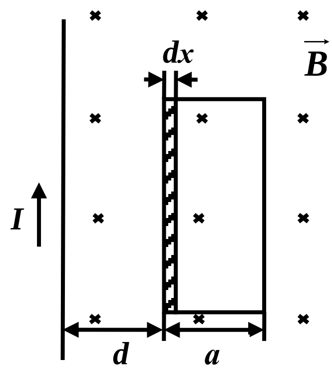


Рис.10.3

Решение

Магнитный поток сквозь поверхность площадью S можно вычислить по формуле (10.1б):

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B_n \cdot dS \,.$$

Квадратная рамка находится в неоднородном магнитном поле прямого тока с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x}, \qquad (1)$$

где x – расстояние от провода до рассматриваемой точки. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки (см. рис. 10.3), поэтому для всех точек B_n=B.

Разобъем площадь рамки на элементарные площадки dS=l·dx, в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной.

Подставив (1) в формулу (10.1б) и проинтегрировав полученное выражение в пределах от d до d+a, учтя при этом, что d=a, получим для искомого магнитного потока:

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi \cdot x} \cdot dx = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot ln\frac{d+a}{d} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot ln 2 \,.$$

$$\Phi = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0{,}65}{2 \cdot 3{,}14} \cdot 0{,}693 = 4{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{Вб}.$$

Ответ: *Ф=4,5мкВб.*

10.4. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,5 Тл равномерно движется проводник длиной l=10см. По проводнику течет ток I=2А. Скорость движения проводника υ=20 см/с и направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти работу A перемещения проводника за время t=10с и мощность P, затраченную на это перемещение. *(Ответ:0,2 Дж; 0,02 Вт).*

10.5. В однородное магнитное поле с напряженностью H=7,95·10^{3}А/м помещена квадратная рамка со стороной a=4см, имеющая n=10 витков. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол α=30^0. Определите: а) магнитный поток, пронизывающий рамку; б) работу, совершенную магнитным полем при повороте рамки к положению равновесия, если по виткам пропустить ток I=5А. *(Ответ: 8·10^{-5} Вб; 4·10^{-4} Дж).*

10.6. Соленоид изготовлен из медной проволоки с площадью поперечного сечения S_1=1мм^2. Длина соленоида l=25см, его омическое сопротивление R=0,2Ом. Найти индуктивность L соленоида (без сердечника). Удельное сопротивление меди ρ*=1,71·10^{-8} Ом·м. *(Ответ: 5,4·10^{-5} Гн).*

10.7. Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения S=20 см^2 и число витков N=500. Индуктивность катушки с сердечником L=0,28Гн при токе через обмотку I =5А. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника. *(Ответ: 1,4·10^3).*

10.8. В однородное магнитное поле с индукцией B=0,3Тл помещена прямоугольная рамка с подвижной стороной, длина которой l=15см. Определить Э.Д.С. индукции, возникающей в рамке, если ее подвижная сторона перемещается перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью υ =10м/с. *(Ответ: 0,45В).*

10.9. *В однородном магнитном поле индукция которого B=0,1Тл, вращается катушка, состоящая из N=200 витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки T=0,2с; площадь поперечного сечения S=4 см^2. Найти максимальную ЭДС во вращающейся катушке.*

Дано: *B=0,1Тл; N=200; T=0,2с; S=4 см^2.*

Найти: $\varepsilon_{i\,\max}$

Решение

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, в катушке с N витками, вращающейся в однородном магнитном поле, возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Так как, согласно условию задачи, катушка вращается в магнитном поле с угловой скоростью $\omega=2\pi/T$, то в любой момент времени t магнитный поток через каждый виток катушки может быть вычислен по формуле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot cos\alpha \qquad (2)$$

где $\alpha=\omega t$ *– мгновенное значение угла между вектором* $\vec{B}$ *и нормалью* $\vec{n}$ *к площадке S.*

Подставив формулы для α *и* ω *в (2), а затем (2) в (1), получим выражение для мгновенного значения ЭДС индукции:*

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d}{dt}\left(BS \cdot cos\frac{2\pi}{T}t\right) = -NBS \cdot \frac{2\pi}{T}\left(-sin\frac{2\pi}{T}t\right) = NBS \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(sin\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (3)$$

Максимальное значение ЭДС индукции принимает при $sin\frac{2\pi}{T}t = 1$*, то есть если мгновенное значение угла между векторами* $\vec{B}$ *и* $\vec{n}$ *составляет* 90^0*. Поэтому:*

$$\mathcal{E}_i = NBS \cdot \frac{2\pi}{T} = 200 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{0,2} = 250 \cdot 10^{-3}\,B.$$

Ответ: $\mathcal{E}_i = 250$ *мВ.*

10.10. Соленоид, состоящий из N=80 витков и имеющий диаметр d=8см, находится в однородном магнитном поле с напряженностью H=4,8·10^4А/м. Соленоид поворачивается на 180^0 за время t=0,2с. Найти среднее значение ЭДС, возникающей в соленоиде, если ось соленоида до и после поворота направлена вдоль поля. *(Ответ: 0,24В).*

10.11. Соленоид содержит N=100 витков. Сечение сердечника S=10см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией B=1,5Тл. Найти среднее значение ЭДС, которая возникнет на зажимах соленоида, если ток уменьшится до нуля за время t=5·10^{-4}с. *(Ответ: 3·10^3В).*

10.12. *Катушку с ничтожно малым активным сопротивлением и индуктивностью L=3 Гн присоединяют к источнику тока с ЭДС* $\mathcal{E}$ *=15В и ничтожно малым внутренним сопротивлением. Через какой промежуток времени ток в катушке достигнет значения* I_t*= 5А?*

Дано: *L=3 Гн;* $\mathcal{E}$ *=15В;* t_0*=0с;* I_0*=0А;* I_t*=5А.*

Найти: *t.*

Решение

По закону Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I/_{R+r}. \qquad (1)$$

Полная ЭДС цепи согласно условию данной задачи равна сумме ЭДС источника $\mathcal{E}_1$ *и ЭДС самоиндукции* $\mathcal{E}_2$*, возникающей после присоединения катушки к источнику:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \qquad (2)$$

Подставив в (2) выражение для ЭДС самоиндукции (10.4), а затем (2) в (1), получим:

$$\varepsilon_1 + (-L\frac{dI}{dt}) = I(R+r). \qquad (3)$$

По условию задачи сопротивления R и r ничтожно малы, поэтому:

$$\varepsilon_1 - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad или \quad \varepsilon_1 = L\frac{dI}{dt}. \qquad (4)$$

Из (4) можно найти скорость изменения тока: $\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{L}$ *и проведя интегрирование, подсчитать время, необходимое для нарастания тока от* $I_0=0$ *до значения* $I_t=5A$*:* $t = \frac{LI}{\varepsilon_1} = \frac{3\cdot 5}{15} = 1c$.

Ответ: *t=1c.*

10.13. В катушке длиной l=0,5м, диаметром d=5см и числом витков N=1,5·10^3 ток равномерно увеличивается на 0,2А за одну секунду. На катушку надето кольцо из медной проволоки (ρ^*=1,7·10^{-8} Ом·м) площадью сечения S=3мм^2. Определить силу тока в кольце. *(Ответ: 1,66·10^{-3}А).*

10.14. На катушке с сопротивлением R=8,2 Ом и индуктивностью L=25мГн поддерживается постоянное напряжение U=55В. Сколько энергии выделится при размыкании цепи катушки? Какая средняя ЭДС самоиндукции появится при этом в катушке, если энергия будет выделяться в течение 12мс? (*Ответ: 0,56 Дж; 14 В).*

10.15. Катушка имеет индуктивность L=0,144 Гн и сопротивление R=10 Ом. Через какое время t после включения ток в катушке будет равен половине установившегося? *(Ответ:10 мс).*

10.16. Сила тока в обмотке соленоида, содержащего N=1,5·10^3 витков, равна I=5А. Магнитный поток через поперечное сечение соленоида составляет 200 мкВб. Определить энергию магнитного поля в соленоиде. *(Ответ: 0,75 Дж).*

10.17. Через катушку, индуктивность которой L=21мГн, течет ток, изменяющийся со временем по закону $i=i_0 \sin\omega t$, где I_0=5А, $\omega=2\pi/T$ и T=0,02с. Найти зависимость от времени t: а) ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке; б) энергии магнитного поля катушки.
(Ответ: ε *=-33cos100πt В; W=0,263sin^{2}100πt Дж).*

10.18. Соленоид длиной l=50см и площадью поперечного сечения S=2 см^2 имеет индуктивность L=0,2мкГн. При каком токе I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида ω=1мДж/м^3?
(Ответ: 1А).

§11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ТОКА. РЕЗИСТОР, КОНДЕНСАТОР, КАТУШКА ИНДУКТИВНОСТИ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕНОГО ТОКА. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

- ✓ Уравнение собственных колебаний напряжения в контуре с индуктивностью L и емкостью C (LC- контур):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 . \tag{11.1}$$

Собственные колебания происходят по закону:

$$u = u_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) . \tag{11.1a}$$

- ✓ Циклическая частота собственных колебаний:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \tag{11.2}$$

- ✓ Период собственных колебаний (формула Томсона):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} . \tag{11.3}$$

- ✓ Уравнение свободных затухающих колебаний напряжения в контуре с индуктивностью L , емкостью C и активным сопротивлением R (LCR- контур):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 , \tag{11.4}$$

где $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания контура.

Затухающие колебания при $\beta<\omega_0$ происходят по закону:

$$u = u_m \cdot \exp(-\beta t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) , \tag{11.4a}$$

а при $\beta \geq \omega_0$ – процесс апериодический.

- ✓ Частота свободных затухающих колебаний в контуре:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \tag{11.5}$$

- ✓ Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T , \tag{11.6}$$

где a – амплитудные значения любой из колеблющихся величин U и I; T – период колебаний.

- ✓ Добротность LCR- контура при слабом затухании ($\beta<<\omega_0$):

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{\lambda} . \tag{11.7}$$

- ✓ Закон изменения напряжения и силы тока в цепи переменного тока, содержащей только активное сопротивление:

$$u = u_m \cdot \sin\omega t, \quad i = i_m \cdot \sin\omega t , \tag{11.8}$$

где u и i – мгновенные значения амплитуды переменного напряжения и силы тока; u_m и i_m – максимальные (амплитудные) значения напряжения и силы тока.

- ✓ Реактивное емкостное сопротивление:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad (11.9)$$

где ω - частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи.

- ✓ Закон изменения напряжения и силы тока в цепи переменного тока, содержащей только реактивное емкостное сопротивление:

$$u = u_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad i = i_m \cdot \sin \omega t. \qquad (11.10)$$

- ✓ Реактивное индуктивное сопротивление

$$X_L = \omega L. \qquad (11.11)$$

- ✓ Закон изменения напряжения и силы тока в цепи переменного тока, содержащей только реактивное индуктивное сопротивление:

$$u = u_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad i = i_m \cdot \sin \omega t. \qquad (11.12)$$

- ✓ Реактивное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \qquad (11.13)$$

- ✓ Полное сопротивление (импеданс) цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (11.14)$$

- ✓ Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$tg\varphi = \frac{u_L - u_C}{u_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \qquad (11.15)$$

где u_L, u_C, u_R – амплитудные значения напряжения на катушке, емкости и резисторе соответственно.

- ✓ Действующее (эффективное) значение силы тока:

$$i_{эфф} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}. \qquad (11.16)$$

- ✓ Действующее (эффективное) значение напряжения:

$$u_{эфф} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}. \qquad (11.17)$$

✓ Закон Ома для цепей переменного тока:

$$i_{эфф} = \frac{u_{эфф}}{Z} \quad (a); \quad i_m = \frac{u_m}{Z} \quad (б). \tag{11.18}$$

✓ Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока (среднее за период T значение мгновенной мощности):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i_m u_m \cos(\omega t - \varphi)\cos\omega t = \frac{1}{2} i_m u_m \cos\varphi = i_{эфф} \cdot u_{эфф} \cos\varphi, \tag{11.19}$$

где φ – фазовый сдвиг между током и напряжением в контуре; $cos\varphi$ – коэффициент мощности.

✓ Условие резонанса в цепи переменного тока:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \tag{11.20}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой колебательный контур?
2. Какие колебания называются электромагнитными?
3. Почему происходят колебания в колебательном контуре?
4. Почему электромагнитные колебания в реальном контуре затухают?
5. Сравните периоды собственных и затухающих колебаний.
6. Каков физический смысл коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания и добротности?
7. Какой ток называется переменным? Как можно получить переменный ток?
8. Какое сопротивление в цепи переменного тока называют активным?
9. Чем отличаются активное сопротивление в цепи переменного тока и омическое сопротивление в цепи постоянного тока?
10. Какая связь существует между действующими и амплитудными значениями силы тока и напряжения в цепи переменного тока?
11. Чему равна средняя мощность, выделяемая за период в цепи переменного тока?
12. Почему постоянный ток не может протекать через конденсатор?
13. Что называется емкостным сопротивлением? От чего зависит емкостное сопротивление конденсатора?
14. Каково соотношение между фазами колебаний силы тока и напряжения на конденсаторе в цепи переменного тока?
15. Что называется индуктивным сопротивлением? От чего оно зависит?
16. Каково соотношение между фазами колебаний силы тока и напряжения в идеальной катушке?
17. Каков сдвиг фазы колебаний напряжения на конденсаторе и катушке относительно фазы колебаний силы тока в цепи переменного тока?
18. Что называют полным сопротивлением (импедансом) электрической цепи переменного тока?
19. Как строится векторная диаграмма для цепи, составленной из последовательно соединенных резистора, катушки и конденсатора?

20. Как определить мгновенную мощность тока в активном сопротивлении, конденсаторе и катушке индуктивности?
21. Чему равно среднее значение мощности переменного тока за период в активном сопротивлении и реактивном сопротивлениях?
22. Как зависит средняя мощность переменного тока от параметров электрической цепи и сдвига фаз колебаний силы тока и напряжения?
23. Чему равен коэффициент мощности?
24. В чем заключается явление электрического резонанса? При каком условии наблюдается электрический резонанс?

Рекомендации к решению задач

1. Начертите схему электрической цепи.

2. Для определения сдвига фаз между колебаниями тока и напряжения используйте метод векторных диаграмм.

3. Следует помнить, что

– если в колебательном контуре (цепи), содержащем емкость, индуктивность и активное сопротивление, действует периодическая ЭДС частотой ω, то в такой цепи установятся вынужденные колебания тока той же частоты;

– величины i и u, определяющие электрические процессы во всей цепи и на ее отдельных участках, совершают гармонические колебания, находясь в различных фазах, поэтому напряжения (и токи) складываются по правилу сложения векторных величин с учетом угла (разности фаз);

– полное сопротивление цепи для переменного тока определяется как отношение амплитуды полного напряжения к амплитуде тока, и состоит из двух составляющих – активной и реактивной; активное сопротивление всегда приводит к выделению тепла, наличие реактивного сопротивления не сопровождается выделением тепла;

– катушка, обладающая сопротивлением R и индуктивностью L в цепи переменного тока, соответствует последовательно включенным R и L;

– конденсатор с утечкой, то есть конденсатор, обладающий емкостью C и сопротивлением R, соответствует параллельно включенным R и C;

– при последовательном соединении резистора, катушки и конденсатора сила тока одинакова на всех участках, и построение векторной диаграммы удобно начинать с вектора силы тока i_m;

– в цепи, состоящей из последовательно соединенных активного, емкостного и индуктивного сопротивлений, максимальному току при резонансе $i_{рез}$ соответствует такое значение ω, при котором реактивное сопротивление цепи обращается в нуль, а полное сопротивление минимально и равно омическому.

Задачи

11.1. На какой диапазон частот можно настроить колебательный контур, если его индуктивность L=3 мГн, а емкость может меняться от 60 до 480 пФ? Сопротивлением контура можно пренебречь. *(Ответ: f_1=700Гц; f_2=1,95·10^3 Гц).*

11.2. Закон изменения тока со временем в колебательном контуре имеет вид $i=-0{,}02\sin 400\pi t$ А. Индуктивность контура L=1 Гн. Найти: 1) период колебаний; 2) емкость С контура; 3) максимальную энергию магнитного поля $W_м$ и максимальную энергию электрического поля $W_{эл}$. *(Ответ: 1) 5мс; 2) 0,63 мкФ; 3)0,2 мДж).*

11.3. *Определите минимальное значение активного сопротивления при разрядке лейденской банки, при котором разряд будет апериодическим. Емкость лейденской банки C=1,2нФ, а индуктивность проводов L=3 мкГн. Запишите закон убывания заряда на обкладках банки при ее разрядке.*

Дано: *C=1,2нФ=1,2·10^{-9}Ф; L=3 мкГн=3·10^{-6}Гн.*

Найти: R.

Решение

Лейденская банка представляет собой колебательный контур с параметрами L, R и C, частота свободных затухающих колебаний в котором может быть вычислена по формуле (11.5) с учетом выражения для коэффициента затухания контура $\beta = R/2L$ *и формулы (11.2):*

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,. \qquad (1)$$

Так как $T = 2\pi/\omega$, *то при увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет, и при* $\beta=\omega_0$ ($\omega=0$) *обращается в бесконечность, то есть вместо периодических колебаний заряда на обкладках банки произойдет ее разрядка (апериодический процесс). Минимальное сопротивление, при котором разряд будет апериодическим, определим, приравняв к нулю формулу (1):* $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$.

Таким образом, $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{3\cdot 10^{-6}}{1{,}2\cdot 10^{-9}}} = 100$ Ом.

Уравнение зависимости изменения заряда на обкладках банки аналогично уравнению (11.4а) при свободных затухающих колебаниях:

$$q = q_m \cdot exp(-\beta t)\cdot cos(\omega t + \varphi)\,. \qquad (2)$$

Учитывая условия возникновения апериодического процесса ($\beta=\omega_0$ *и* $\omega=0$)*, получим окончательно:*

$$q = q_m \cdot exp(-\omega_0 t)\,.$$

Ответ: *R=100 Ом.*

11.4. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=7 мкФ и катушки индуктивностью L=0,23 Гн и сопротивлением R=40 Ом. Обкладкам конденсатора сообщается заряд q=0,56 мКл. Определите: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) отношение энергии магнитного поля в катушке к энергии электрического поля в конденсаторе в момент времени, когда ток максимален. Запишите закон изменения со временем t напряжения на обкладках конденсатора. *(Ответ:1)8мс;2)0,7; 3)20,5; 4)* $u=80exp(-87t)\cdot cos250\pi t$*).*

11.5. Колебательный контур имеет емкость C=1,1нФ и индуктивность L=5 мГн. Логарифмический декремент затухания λ=0,005. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура? *(Ответ: 6,8 мс).*

11.6. Добротность колебательного контура Q=10. Определите, на сколько процентов отличается частота затухающих колебаний контура ω от частоты собственных колебаний ω_0. *(Ответ: 0,125%).*

11.7. В цепи имеется переменный ток $i=i_m sin\omega t$. По какому закону изменяется напряжение на участке цепи: А) с активным сопротивлением; б) с емкостным сопротивлением; в) с индуктивным сопротивлением. Изобразите графически изменение тока и напряжения во времени и постройте векторную диаграмму для каждого случая.

11.8. *Катушка длиной* l=25см *и радиусом* r=2см *имеет обмотку из* $N=10^3$ *витков медной проволоки* (ρ^**меди*$=1,7\cdot 10^{-8}$Ом·м), *площадь поперечного сечения которой* S^*=1мм^2. *Катушка включена в цепь переменного тока частотой* f=50Гц. *Какую часть полного сопротивления* Z *катушки составляют активное сопротивление* R *и индуктивное сопротивление* X_L?

Дано: l=25см=0,25м; r=2см=$2\cdot 10^{-2}$м; $N=10^3$; S^*=1мм^2=10^{-6}м^2;

ρ^**меди*$=17\cdot 10^{-9}$Ом·м; f=50Гц.

Найти: R/Z; X_L/Z.

Решение

Будем считать, что витки провода плотно прилегают друг к другу, а толщина изоляции ничтожно мала. Тогда, используя соотношение (8.4) и учитывая, что длина провода, навитого на катушку:

$$l^* = 2\pi r N,$$

получим формулу для расчета активного сопротивления катушки:

$$R = \rho^* \frac{l^*}{S^*} = \rho^* \cdot \frac{2\pi r N}{S^*}. \qquad (1)$$

$$R = \frac{17\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 10^3}{10^{-6}} = 2{,}14\ Ом.$$

Индуктивность катушки вычислим, используя выражение (10.6):

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2 S}{l} = \mu_0\mu\frac{\pi\cdot r^2\cdot N^2}{l}, \qquad (2)$$

где S – площадь поперечного сечения катушки.

Подставив (2) в (11.11) и учтя, что μ=1, вычислим реактивное сопротивление катушки:

$$X_L = \omega L = 2\pi \nu L = \frac{2\mu_0 \mu \nu \pi^2 N^2 r^2}{l}. \qquad (3)$$

$$X_L = \frac{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-2}} = 1{,}98 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление катушки найдем, подставив (1) и (3) в (11.14):

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L{}^2} = \sqrt{(1{,}98)^2 + (2{,}14)^2} = 2{,}91 \text{ Ом}.$$

Тогда искомые отношения:

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{1{,}98}{2{,}91} = 0{,}68, \qquad \frac{R}{Z} = \frac{2{,}14}{2{,}91} = 0{,}73.$$

Ответ: *73%; 68%.*

11.9. Катушка длиной l=50см и площадью поперечного сечения S=10см^2 включена в цепь переменного тока частотой f =50Гц. Число витков катушки N=3000. Найти активное сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между током и напряжением φ=60^0. *(Ответ: 41 Ом).*

11.10. Катушка с активным сопротивлением R=10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением u=127В и частотой f=50Гц. Найти индуктивность катушки, если известно, что катушка поглощает мощность P=400 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ=60^0. *(Ответ: 5,57·10^{-2} Гн).*

11.11. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением u=220В и частотой f=50Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток i=0,5А и падение напряжения на ней было равным $u_л$=110 В? *(Ответ: 8,36·10^{-6}Ф).*

11.12. *В цепь переменного тока с частотой f=50Гц включены параллельно резистор сопротивлением R=1 кОм и конденсатор емкостью C=1мкФ. Определите полное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением.*

Дано: *f=50Гц; R=10^3 Ом; C=10^{-6} Ф.*

Найти: *Z.*

Решение

Начертим схему включения приборов (рис.11.12а) и построим векторную диаграмму амплитудных значений падений напряжения на резисторе u_R и конденсаторе u_C в параллельной цепи (рис.11.12б).

Так как при параллельном соединении на всех элементах падает одинаковое напряжение u_m=u_{Rm}=u_{Cm} , равное внешнему, то за основное направление выберем направление вектора амплитуды внешнего напряжения u_m.

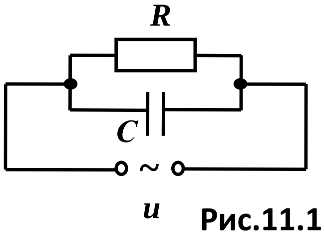


Рис.11.12а

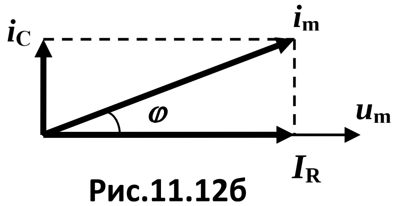


Рис.11.12б

На активном сопротивлении амплитуда тока равна:

$$i_{R_m} = {u_m}/{R} \qquad (1)$$

и совпадает по фазе с напряжением.

На конденсаторе амплитуда тока равна:

$$i_{C_m} = \frac{u_m}{R_C} = \omega \cdot C \cdot u_m \qquad (2)$$

и опережает по фазе напряжение на угол π/2.

Таким образом, из прямоугольного треугольника имеем:

$$i_m = \sqrt{i_{R_m}^2 + i_{C_m}^2}\ . \qquad (3)$$

Учитывая, что амплитуда силы тока в полной цепи равна:

$$i_m = {u_m}/{Z}\ , \qquad (4)$$

и подставив выражения (1), (2), (4) в (3), получим:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}\ .$$

Отсюда искомое полное сопротивление цепи при параллельном соединении резистора и конденсатора:

$$Z = \frac{R}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}} = \frac{R}{\sqrt{R^2(2\cdot\pi\cdot\nu)^2C^2 + 1}} = \frac{10^3}{\sqrt{10^6\cdot(2\cdot 3{,}14\cdot 50)^2\cdot 10^{-12} + 1}} = 954\ Ом\cdot$$

Из векторной диаграммы видно, что:

$$\varphi = arctg\left(\frac{i_{C_m}}{i_{R_m}}\right) = arctg(\omega\cdot C\cdot R) = arctg\left(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 10^{-6}\cdot 10^3\right) = 17{,}4^0\ .$$

Ответ: *Z=954 Ом; φ=17,4⁰.*

11.13. Цепь переменного тока состоит из последовательно соединенных катушки, конденсатора и резистора. Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе u_{LC}= 173В, а амплитудное значение напряжения на резисторе u_R=100В. Определить сдвиг фаз между током и внешним напряжением. *(Ответ:60^0).*

11.14. В цепь переменного тока частотой *f*=50Гц и действующим напряжением $u_{эфф}$= 220В последовательно включены активная нагрузка сопротивлением *R*=100 Ом, катушка индуктивностью *L*=3,2Гн и конденсатор электроемкостью *C*=3,2 мкФ. Определите: 1) действующее значение силы тока в цепи, 2) сдвиг фазы между колебаниями тока и напряжения. *(Ответ:1)2,2А; 2)5,6^0).*

11.15. Индуктивность *L*=22,6Гн и сопротивление *R* включены параллельно в цепь переменного тока частотой *f*=50Гц. Найти сопротивление *R*, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током φ=60^0. *(Ответ: 12,3Ом).*

11.16. В цепь переменного тока частотой *f*=50Гц и действующим значением напряжения *u*=300В последовательно включены конденсатор, резистор сопротивлением *R*=50 Ом и катушка индуктивностью *L*=0,1 Гн. Падения напряжения $u_{CR}=2u_{RL}$. Определите: 1) емкость конденсатора; 2) действующее значение силы тока. *(Ответ: 29,8мкФ; 3,32А).*

11.17. В цепь переменного тока частотой *f*=50Гц последовательно включены резистор сопротивлением *R*=628 Ом и катушка индуктивностью *L*. При этом между колебаниями напряжения и силы тока наблюдается сдвиг по фазе φ=π/4. Какова индуктивность катушки? Конденсатор какой емкости нужно включить последовательно в цепь, чтобы сдвиг фазы стал равен нулю? *(Ответ:2 Гн; 5 мкФ).*

11.18. *Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением R=5 Ом, катушки индуктивностью L=0,8 Гн с и конденсатора емкостью C=15 мкФ включена в сеть частотой f=50Гц с действующим напряжением $u_{эфф}$=220В. Известно, что напряжение на катушке опережает ток на угол α=60^0. Воспользовавшись векторной диаграммой, определите: 1) мощность, выделяемую во всей цепи и на каждом из ее элементов; 2) коэффициент мощности для всей цепи.*

Дано: $u_{эфф}$ *=220В; f=50Гц; C=15 мкФ; R=5 Ом; L=0,8Гн;* φ*=60^0.*

Найти: *P; P_R;P_L; P_C.*

Решение

Начертим схему включения приборов (рис.11.18а) и построим векторную диаграмму амплитудных значений напряжений (рис.11.18б).

Так как при последовательном соединении через все элементы идет одинаковый ток, то за основное направление выберем направление вектора амплитуды тока i_m.

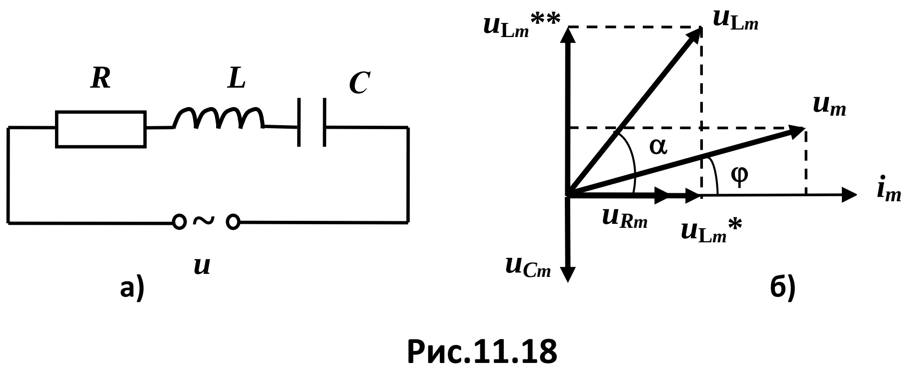


Рис.11.18

Амплитуда напряжения на конденсаторе u_{Cm} отстает по фазе от тока на $\pi/2$. Амплитуда напряжения на катушке u_{Lm}, согласно условию задачи, опережает ток на угол $\alpha=\pi/3$.

Разложим амплитуду напряжения на катушке на две составляющие – активную (колеблется в фазе с током):

$$u^{*}_{L_m} = u_{L_m} \cdot \cos\alpha = i_m \cdot R^{*}_{L}$$

и реактивную (опережает ток по фазе на $\pi/2$:)

$$u^{**}_{L_m} = u_{L_m} \cdot \sin\alpha = i_m \cdot R^{**}_{L}.$$

Мощность, поглощаемая каким-либо участком цепи, определяется квадратом действующего значения тока и активным сопротивлением участка: $P = i^{2}_{эфф} \cdot R$.

Мощность, выделяемая на конденсаторе, равна нулю, так как конденсатор не имеет активного сопротивления.

Мощность, выделяемая на резисторе:

$$P_R = i^{2}_{эфф} \cdot R. \qquad (1)$$

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении катушки R^{*}_{L}:

$$P_{R_L} = i^{2}_{эфф} \cdot R^{*}_{L}. \qquad (2)$$

Мощность P, выделяемая во всей цепи:

$$P = P_R + P_{R_L}. \qquad (3)$$

Активное сопротивление катушки найдем из векторной диаграммы:

$$R^{*}_{L} = \frac{\omega L}{tg\alpha} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}1}{1{,}73} = 18{,}2 \text{ Ом}.$$

Воспользовавшись векторной диаграммой и формулой (11.14), найдем полное сопротивление цепи (импеданс):

$$Z = \sqrt{\left(R + R_L\right)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (11.18а), и учтя связь между амплитудными и действующими значениями тока и напряжения (11.16) и (11.17),получим выражение для действующего значения силы тока:

$$i_{эфф} = \frac{u_{эфф}}{\sqrt{\left(R + R_L\right)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{220}{\sqrt{\left(5 + 18{,}2\right)^2 + \left(314 \cdot 0{,}8 - \frac{1}{314 \cdot 15 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 4{,}86 \text{ А}.$$

Рассчитаем численные значения мощностей:

$$P_R = 4{,}86^2 \cdot 5 = 118{,}1 \text{ Вт}; \quad P_{R_L} = 4{,}86^2 \cdot 18{,}2 = 429{,}9 \text{ Вт}; \quad P = 548 \text{ Вт}.$$

Коэффициент мощности для всей цепи найдем из формулы (11.19):

$$cos\varphi = \frac{P}{i_{эфф} \cdot u_{эфф}} = \frac{548}{4,86 \cdot 220} = 0,51 .$$

Ответ: $P_R = 118,1$ Вт; $P_{R_L} = 429,9$ Вт; $P = 548\ Вт; cos\varphi = 0,51.$

11.19. Приборы, включенные в цепь (рис.11.19) показывают: амперметр i=4,2А; вольтметр u=220В; ваттметр P=325 Вт. Определите активное сопротивление R и емкость *C*. *(Ответ: 18,4 Ом; 65мкФ).*

11.20. К электрической цепи (рис. 10.20) подведено переменное напряжение u=380В частотой f=50Гц. Активное сопротивление R=30 Ом, емкостное сопротивление составляет 30 Ом. Определите показания приборов. *(Ответ:* i_1*=12,7А;* i_2*=12,7А; i=17,9А; P=4,8·*10^3*Вт).*

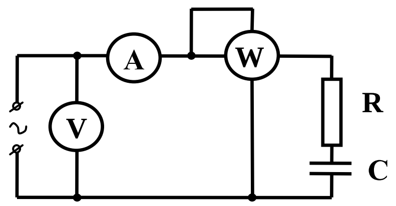


Рис. 11.19

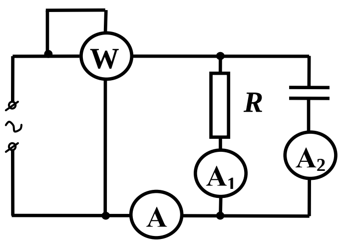


Рис. 11.20

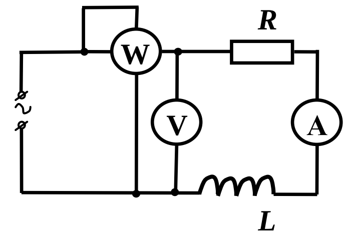


Рис. 11.21

11.21. Переменное напряжение частотой f=50 Гц подается на последовательно соединенные активное сопротивление R=22 Ом и дроссель L (рис.11.21). Приборы, включенные в цепь, показывают: ваттметр 940 Вт, вольтметр 220 В, амперметр 5А. Определите: 1)мощность, выделяемую в дросселе; 2) параметры дросселя. (*Ответ:1)390 Вт; 2)15,6 Ом; 0,073 Гн).*

11.22. В цепь переменного синусоидального тока стандартной частоты включены последовательно активное сопротивление R=1 кОм, катушка индуктивности L=0,5 Гн и конденсатор электроемкостью C=1 мкФ. Действующее напряжение в сети $u_{эфф}$=71В. Написать уравнения колебания напряжения и силы тока в сети. Определить мощность, выделяемую в ней.*(Ответ:*$u=100sin(100\pi t-0,4\pi)$*;* $I=3,1\cdot10^{-2}sin100\pi t$*; 0,48Вт).*

11.23. Электропечь, включенная в цепь переменного тока $i=10sin100\pi t$, имеет сопротивление 22,0 Ом. КПД печи 90%. Сколько воды, взятой при температуре 373К, можно выпарить в этой печи за 1 час? Удельная теплота парообразования воды r=2,26·10^6Дж/кг. *(Ответ: 1,6 кг).*

11.24. *В сеть переменного тока напряжением* $u_{эфф}$*=110 В и частотой f=50Гц последовательно включены конденсатор емкостью C=50 мкФ и катушка индуктивностью L=0,2Гн с омическим сопротивлением R=4 Ом. Определите: 1) действующее значение силы тока в цепи; 2) частоту тока, при которой в цепи наступит резонанс напряжений; 3) силу тока в цепи* $i_{рез}$ *, напряжение на зажимах катушки* $(u_L)_{рез}$ *и на пластинах конденсатора* $(u_C)_{рез}$ *при резонансе напряжений.*

Дано: $u_{эфф}$*=110 В; f=50Гц; C=50 мкФ; L=0,2Гн; R=4 Ом.*

Найти: $i_{эфф}$; $f_{рез}$; $i_{рез}$; $(u_L)_{рез}$; $(u_C)_{рез}$.

Решение

Так как конденсатор и катушка включены последовательно, то ток, протекающий через все элементы цепи, будет один и тот же.

Действующее значение силы тока определим по закону Ома (11.18):

$$i_{эфф}=\frac{u_{эфф}}{Z}=\frac{u_{эфф}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

$$i_{эфф}=\frac{110}{\sqrt{16+\left(6{,}28\cdot 50\cdot 0{,}2-\frac{1}{6{,}28\cdot 50\cdot 50\cdot 10^{-6}}\right)^2}}=1{,}17A.$$

Резонансную частоту найдем по формуле (11.3):

$$f_{рез}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{0{,}2\cdot 50\cdot 10^{-6}}}=50c^{-1}=50Гц.$$

Так как при резонансе реактивные сопротивления катушки и конденсатора равны: $R_C=R_L$,то полное сопротивление цепи $Z=R$.

Тогда для действующего значения силы тока при резонансе получим:

$$i_{эфф\,рез}=\frac{u_{эфф}}{R}=\frac{110}{4}=27{,}5A.$$

Действующие значения напряжений на катушке и конденсаторе найдем по формулам:

$$(u_L)_{рез}=(u_C)_{рез}=i_{эфф\,рез}\cdot R_L=i_{эфф\,рез}\cdot\omega L=27{,}5\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 0{,}2=1727B.$$

Ответ: *$i_{эфф}$=1,17А; $f_{рез}$ =50Гц; $i_{рез}$=27,5А; $(u_L)_{рез}$=(uC)рез=$1{,}73\cdot 10^3$В.*

11.25. В сеть с напряжением 120В включены последовательно катушка индуктивности с активным сопротивлением *R*=10 Ом и конденсатор. При частоте *f*=50Гц индуктивное сопротивление R_L=2 Ом, емкостное R_C=500 Ом. Определите ток в цепи и напряжение на ее участках при резонансе, который получат, изменяя частоту. *(Ответ: 12А; u_C=380В; u_L=170В).*

11.26. В сеть с напряжением 220 В включены последовательно катушка индуктивностью *L*=160мГн и активным сопротивлением *R*=2 Ом, и конденсатор емкостью *C*=64мкФ. Определите ток в цепи, если частота тока *f*=200 Гц. При какой частоте наступит резонанс напряжений, и каковы будут при этом ток и напряжение на катушке и конденсаторе? *(Ответ:1,18А;50Гц;110А; $5{,}5\cdot 10^3$В).*

11.27. В цепь переменного тока частотой *f*=50 Гц включены параллельно соединенные конденсатор и катушка индуктивностью *L*=1 Гн. Определите емкость *C* конденсатора, если сила тока во внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. *(Ответ: 10 мкФ).*

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Академия, 2008. – 560 с.: ил.
2. Александров В.Н., Каменецкая М.С., Смирнов К.В. Частные вопросы курса физики. – М.: 2010. – 196с.: ил.
3. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Молекулярная физика. – М.: Академия, 2000. – 272с.: ил.
4. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Электродинамика. – М.: Академия, 2002. – 352с.: ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Физические постоянные

Скорость распространения электромагнитных волн (скорость света) в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}807$ м/с^2
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/к
Элементарный заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная вакуума	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная вакуума	$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м

Некоторые внесистемные единицы

1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж;	1 кВт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж;	1 кал = 4,187 Дж
1 а.е.м. = $1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг	1 атм = 760 мм рт.ст.	1 мм.рт.ст. = 133,3 Па

Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Наименование приставки	Множитель	Наименование приставки	Множитель	Наименование приставки	Множитель
экса (Э)	10^{18}	кило (к)	10^{3}	микро (мк)	10^{-6}
пета (П)	10^{15}	гекто (г)	10^{2}	нано (н)	10^{-9}
тера (Т)	10^{12}	деци (д)	10	пико (п)	10^{-12}
гига (Г)	10^{9}	санти (с)	10^{-2}	фемто (ф)	10^{-15}
мега (М)	10^{6}	милли (м)	10^{-3}	атто (а)	10^{-18}

Греческий алфавит

БУКВЫ ПРОПИСНЫЕ, СТРОЧНЫЕ	НАЗВАНИЕ БУКВЫ	БУКВЫ ПРОПИСНЫЕ, СТРОЧНЫЕ	НАЗВАНИЕ БУКВЫ
Α,α	альфа	Ν,ν	ни (ню)
Β,β	бета	Ξ,ξ	кси
Γ,γ	гамма	Ο,ο	омикрон
Δ,δ	дельта	Π,π	пи
Ε,ε	эпсилон	Ρ,ρ	ро
Ζ,ζ	дзета	Σ,σ	сигма
Η,η	эта	Τ,τ	тау
Θ,θ	тета	Υ,υ	ипсилон
Ι,ι	йота	Φ,φ	фи
Κ,κ	каппа	Χ,χ	хи
Λ,λ	лямбда	Ψ,ψ	пси
Μ,μ	ми (мю)	Ω,ω	омега

П е р и о д и ч е с к а я   с и с т е м а

периоды	ряды	Г Р У П П Ы				
		I	II	III	IV	V
1	I	H 1 1,00794 водород				
2	II	Li 3 6,941 литий	Be 4 9,0122 бериллий	B 5 10,811 бор	C 6 12,0112 углерод	N 7 14,0067 азот
3	III	Na 11 22,9898 натрий	Mg 12 24,305 магний	Al 13 26,9815 алюминий	Si 14 28,086 кремний	P 15 30,9738 фосфор
4	IV	K 19 39,0983 калий	Ca 20 40,078 кальций	21 Sc 44,956 скандий	22 Ti 47,90 титан	23 V 50,942 ванадий
	V	29 Cu 63,546 медь	30 Zn 65,37 цинк	Ga 31 69,72 галлий	Ge 32 72,59 германий	As 33 74,92 мышьяк
5	VI	Rb 37 85,468 рубидий	Sr 38 87,62 стронций	39 Y 88,905 иттрий	40 Zr 91,22 цирконий	41 Ni 92,906 ниобий
	VII	47 Ag 107,868 серебро	48 Cd 112,40 кадмий	In 49 114,82 индий	Sn 50 18,69 олово	Sb 51 121,75 сурьма
6	VIII	Cs 55 132,9055 цезий	Ba 56 137,34 барий	57 La* 138,91 лантан	72 Hf 178,49 гафний	73 Ta 180,95 тантал
	IX	79 Au 196,967 золото	80 Hg 200,59 ртуть	Tl 81 204,37 таллий	Pb 82 207,19 свинец	Bi 83 208,98 висмут
7	X	Fr 87 [223] франций	Ra 88 [226] радий	89 Ac** [227] актиний	Ku 104 [260] курчатовий	

***лантаноиды**

58 Ce 140,116 церий	59 Pr 140,91 празеодим	60 Nd 144,24 неодим	61 Pm 145 прометий	62 Sm 150,35 самарий	63 Eu 151,96 европий	64 Gd 157,25 гадолиний
65 Tb 158,92 тербий	66 Dy 162,50 диспрозий	67 Ho 164,93 гольмий	68 Er 167,26 эрбий	69 Tm 168,93 тулий	70 Yb 173,04 иттербий	71 Lu 174,97 лютеций

х и м и ч е с к и х   э л е м е н т о в   Д . И . М е н д е л е е в а

Э Л Е М Е Н Т О В					
VI	VII	VIII			0
					He 2 4,0026 гелий
O 8 15,9994 кислород	F 9 18,9984 фтор				Ne 10 20,183 неон
S 16 32,064 сера	Cl 17 35,453 хлор				Ar 18 39,948 аргон
24 51,996 Cr хром	25 54,938 Mn марганец	26 55,847 Fe железо	27 58,933 Co кобальт	28 58,71 Ni никель	
Se 34 78,96 селен	Br 35 79,90 бром				Kr 36 83,80 криптон
42 95,94 Mo молибден	43 (99) Tc технеций	44 101,07 Ru рутений	45 102,905 Rh родий	46 106,4 Pd палладий	
Te 52 127,60 теллур	I 53 126,904 иод				Xe 54 131,30 ксенон
74 183,85 W вольфрам	75 186,2 Re рений	76 190,2 Os осмий	77 192,2 Ir иридий	78 195,09 Pt платина	
Po 84 [209] полоний	At 85 [210] астат				Rn 86 [222] радон

****актиноиды**

90 232,038 Th торий	91 (231) Pa протактини й	92 238,03 U уран	93 (237) Np нептуний	94 (242) Pu плутоний	95 (243) Am америций	96 (247) Cm кюрий
97 (247) Bk берклий	98 (249) Cf калифорний	99 (254) Es эйнштейний	100 (253) Fm фермий	101 (256) Md менделевий	102 (256) No нобелий	103 (257) Lr лоуренсий

Учебное издание

Александров Владимир Николаевич,
Виноградова Наталия Борисовна,
Коротаева Евгения Ароновна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЙ
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Компьютерная верстка *Н.Б. Виноградовой*

Оформление обложки *В.Н. Александрова и Н.Б. Виноградовой*

Сдано в печать 12.05.2010
Формат 60x90/16. Объем 6,5 п.л. Тираж 120 экз.
Отпечатано в типографии ООО «Постатор»

Сахаров Дмитрий Иванович

04.03.1889-15.12.1961

Д.И.Сахаров – один из основателей русской методики преподавания физики. В его трудах получили развитие идеи школьных учителей, а затем профессоров Н.В. Кашина, И.И. Соколова, Д.Д. Галанина, П.А. Знаменского.

С 1930 по 1948 г.г. деятельность Д.И.Сахарова была связана с Московским государственным педагогическим институтом им. В.И.Ленина (МГПИ, ныне – МПГУ). В 1942–1943 гг. он исполнял обязанности помощника декана физико-математического факультета МГПИ. В 1944 г. под его редакцией вышел в свет «Курс физики», «переросший» впоследствии в трехтомный «Элементарный учебник физики» (1948 г.), ставший на десятилетия любимым учебником многих поколений школьников и переиздающийся до настоящего времени. Талантливость в постановке физических вопросов и оригинальность в их решении с особым блеском проявились в составленном Д.И. Сахаровым «Сборнике задач по физике» для педагогических вузов, выдержавшем двенадцать изданий и приобретавшем с каждым новым изданием все большую популярность. И сейчас задачник Дмитрия Ивановича является одним из основных на физических факультетах. В 2003 г. сотрудники кафедры общей и экспериментальной физики МПГУ выпустили новое, 13-е издание «Сборника задач по физике».