

Лабораторная работа № 1.8¹⁾

Изучение кинематики и динамики качения шара

Введение

Движение центра твердого тела в поле постоянной силы является равноускоренным. В общем случае, когда телу была сообщена начальная скорость под некоторым углом к ускорению, траектория равноускоренного движения представляет собой параболу. Если перпендикулярная к ускорению составляющая начальной скорости равна нулю, то парабола вырождается в прямую линию.

Рассмотрим движение тела в декартовых координатах X и Y на плоскости. Пусть составляющие начальной скорости $v_{0x}, v_{0y} > 0$, а ускорение $a = a_y < 0$. Траектория, которую описывает в пространстве центр масс в этом случае, является параболой, линия симметрии которой параллельна оси Y (рис. 8.1).

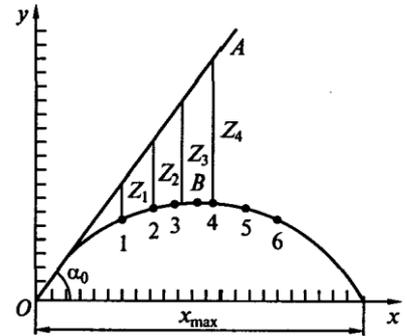


Рис. 8.1

Координаты центра масс тела изменяются по закону:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad x = x_0 + v_{0x}t, \quad (1)$$

где x_0, y_0 - координаты начальной точки (смотри задачу 2.2 в [5]).

Прямая OA на рис. 8.1 соответствует траектории движения центра масс тела в отсутствие постоянной силы ($a_y=0$). Отрезки Z_i определяются разностью:

$$(y_0 + v_{0y}t) - y \quad \text{и равны} \quad a_y \cdot t^2 / 2. \quad (2)$$

Поэтому график $z(t^2)$ есть прямая линия (см. В7 в [4]), из наклона которой к оси абсцисс можно вычислить ускорение a_y .

Мгновенный радиус кривизны траектории $R_{кр}$ определяется мгновенными значениями нормального ускорения a_n и мгновенной скорости v тела в этой точке траектории (смотри задачу 2.25 в [5]) :

$$R_{кр} = v^2 / a_n. \quad (3)$$

Движение твердого тела в поле постоянной силы можно осуществить, заставляя шарик катиться по наклонной плоскости (рис. 8.2). При этом вдоль плоскости действует сила

$$F_y = mg \sin \varphi, \quad (4)$$

приложенная к центру масс (φ - угол наклона плоскости к горизонту), и сила трения сцепления F_T , приложенная в точке соприкосновения шарика с плоскостью. Если шарик катится *без скольжения*, то соблюдаются следующие соотношения:

$$a_y = \alpha r = g \sin \varphi \quad \text{и} \quad I_1 \cdot \alpha = mgr \sin \varphi, \quad (5)$$

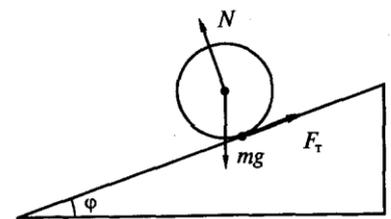


Рис. 8.2.

¹⁾ Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

где a_y - ускорение поступательного движения центра масс шарика; r - радиус шарика; α - угловое ускорение вращательного движения; I_1 - момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения, проходящей горизонтально через точку касания шарика с наклонной плоскостью.

Из второго уравнения, при известных значениях ускорения поступательного движения центра масс шарика a_y , его массы и радиусе, можно определить его момент инерции относительно мгновенной оси вращения:

$$I_1 = mr^2 g \sin \varphi / a_y. \quad (6)$$

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное определение кинематических характеристик (траектории и ускорения) движения центра масс шарика при его качении по наклонной плоскости в поле тяжести;
- экспериментальное определение момента инерции металлического шарика по определенному ранее значению ускорения a_y при его качении по наклонной плоскости в поле тяжести и сравнение с его теоретическим значением;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 8.3) позволяет получить траекторию движения металлического шарика по наклонной плоскости, а также измерить промежутки времени, в течение которого шарик передвигается от начальной к произвольно выбранной точке траектории.

Рабочая поверхность установки 1 ограничена планками $6, 7, 8, 14$. Миллиметровая бумага помещается на рабочей поверхности установки и прижимается откидной планкой 6 . Подвижную планку 8 можно передвигать вдоль рабочей поверхности установки и фиксировать в нужном положении стопором 13 . Металлический желоб 2 имеет в верхней части держатель 3 , на котором устанавливается шарик. С помощью зажимов 4 держатель можно передвигать по желобу, устанавливая шарик на нужной высоте. Желоб можно вращать вокруг оси, перпендикулярной рабочей поверхности. Нужное положение желоба фиксируется стопором 16 . Транспортер 15 служит для ориентировочного определения направления начальной скорости шарика – угла β .

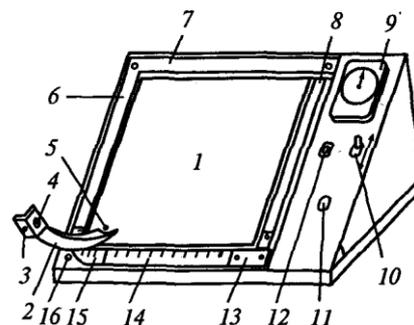


Рис. 8.3.

Питание установки осуществляется от городской электрической сети с напряжением 220 В. При положении тумблера 10 «Вкл» на панели установки зажигается сигнальная лампочка 12 . Пуск шарика осуществляется кнопкой 11 . При контакте шарика с рабочей поверхностью установки замыкается контакт 5 и включается электрический секундомер 9 , отсчитывающий время движения шарика по рабочей поверхности установки. Описывая параболическую

траекторию, шарик ударяется о планку 8 или 14. При этом замыкается контакт, вмонтированный в эти планки, и останавливается секундомер.

После нескольких прикидочных пусков шарика миллиметровая бумага, расположенная на рабочей поверхности установки, покрывается копировальной бумагой. Затем осуществляется 10 рабочих пусков шарика, и на миллиметровой бумаге остается след траектории движения шарика.

Подготовка протокола к работе

(Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «**Задание 1. Определение траектории и ускорения центра масс шарика при его качении по наклонной плоскости**».

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания 1** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 для записи результатов измерений.

Для нахождения v_{0x} используем свойство равномерного движения:

$$v_{0x} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} = \dots; \quad v_{0y} = v_{0x} \cdot \operatorname{tg} \alpha_0; \quad v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}.$$

Табл. 1

№	x_i , м	y_i , м	z_i , м	t_i , с	v_0 , м с ⁻¹	v_{0x} , м с ⁻¹	v_{0y} , м с ⁻¹	a_y , м с ⁻²
1								
2								
3								
4								
5								
6								
$R_{кр}$ (в точке O) = ___ м; $\varepsilon_{R_{кр}}$ = ___ %					$R_{кр}$ (в точке B) = ___ м; $\varepsilon_{R_{кр}}$ = ___ %			

Оставьте в тетради место (0,5 стр.) для вспомогательных записей и вычислений и запишите заголовок: «**Задание 2. Определение момента инерции шарика относительно мгновенной оси и оси, проходящей через его центр масс**».

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания 2** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 2 для записи результатов измерений.

Табл. 2

Момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1		Момент инерции шарика относительно оси вращения, проходящей через его центр масс I_0	
Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория
$\varepsilon_{I_1} = \underline{\hspace{2cm}} \%$		$\varepsilon_{I_0} = \underline{\hspace{2cm}} \%$	

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Получите на миллиметровой бумаге траекторию движения шарика. Выберите на траектории 6 точек. Измерьте и запишите для каждой из этих точек координаты y_i , время t_i (подвижная планка (8) в этих измерениях устанавливается вблизи выбранной точки траектории), отрезки $v_{0y}t_i$, а также угол наклона α_0 касательной к траектории в начальной точке и углов φ и β , где β (β -угол между направлением мгновенной скорости и осью X). Запишите в тетрадь абсолютные ошибки прямых измерений перечисленных выше величин.

Из этих измерений вычислите средние значения скоростей v_{0x} , v_{0y} и v_0 , также координаты $z_i = v_{0y}t_i - y_i$. Постройте график в координатах $\{t^2, z_i\}$ (см. **В7** [4]) и определите ускорение движения шарика a_y . Вычислите относительную ошибку a_y . Вычислите радиусы кривизны траектории $R_{кр}$ в точках O и B (см. рис 8.1 и задачу 2.25 в [5]) и относительную ошибку косвенных измерения $R_{кр}$ - $\varepsilon_{R_{кр}}$ (см. **В4** [4] и **Приложение** в настоящей работе). Обратите внимание, что в точке O угол $\beta = \alpha_0$, в точке B угол $\beta = 0$. Значения x , y , z , t , v_0 , v_{0x} , v_{0y} , a_y , $R_{кр}$ и $\varepsilon_{R_{кр}}$ и внесите в табл. 1.

Задание 2

Измерьте массу m и радиус r шарика и угол наклона рабочей поверхности к горизонту φ и запишите в тетрадь эти значения и абсолютные ошибки этих прямых измерений. Пользуясь значением a_y , полученным при выполнении **Задания 1**, вычислите момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1 , и оси, проходящей через его центр масс I_0 . Рассчитайте теоретические значения I_1 и I_0 . Данные вычислений I_1 , I_0 , и относительные ошибки их косвенных измерения ε_{I_1} и ε_{I_0} (см. **В4** в [4] **Приложение** в настоящей работе) внесите в табл. 2.

Приложение

Задание 1

Так как ускорение $a_y = \frac{2z_i}{t^2}$, то относительная ошибка этого косвенного измерения равна (см. примеры в **В4** в [4]): $\varepsilon_{a_y}^2 = \varepsilon_{z_i}^2 + 4\varepsilon_{t_i}^2$.

Радиус кривизны траектории $R_{кр}$ в точках O и B вычисляется, используя (3) и результаты прямых и косвенных измерений. На рис. 8.1 видно, что в точках O и B нормальные ускорения равны, соответственно (см. также задачу 2.25 в [5]):

$$a_n(\text{т. } O) = a_y(\text{т. } O) \cdot \cos \beta \quad \text{и} \quad a_n(\text{т. } B) = a_y(\text{т. } B). \quad (7)$$

Тогда, используя примеры в **В4** [4] и (3) получим

$$\text{для т. } O: \quad \varepsilon_{R_{кр}}^2 = \varepsilon_{a_y}^2 + 4\varepsilon_v^2 + \varepsilon_\beta^2 \cdot \text{tg}^2 \beta; \quad \text{для т. } B: \quad \varepsilon_{R_{кр}}^2 = \varepsilon_{a_y}^2 + 4\varepsilon_v^2. \quad (8)$$

Задание 2

Момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1 вычисляется, используя (6) и результаты прямых и косвенных измерений. Тогда

из (6) и примеров в В4 [4] следует, что относительная ошибка косвенных измерений I_1 равна:

$$\varepsilon_{I_1}^2 = \varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_r^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_\varphi^2 / \operatorname{tg}^2 \varphi + \varepsilon_{a_y}^2. \quad (9)$$

Относительную ошибку косвенных измерений I_0 получите самостоятельно.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5, §5.1–5.6, гл. 10, § 10.1.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.1, §1.1–1.7, гл. 5.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл.1 § 2–4, гл. III §19 гл. V, § 30–36, гл. VI §39-42, гл. VII §44-48.

4. Введение в физический практикум.

5. Механика. Задачи и решения. А.Б. Казанцева, М.С. Каменецкая, и др.- М.; КолосС, 2005.

Примерные контрольные вопросы

1. Докажите, что в общем случае центр масс твердого тела, движущегося в поле постоянной силы, описывает параболу. Получите уравнение траектории движения центра масс твердого тела, брошенного под углом к горизонту.

2. Получите формулу для вычисления ускорения центра масс твердого тела по известным значениям максимальной высоты и времени подъема.

3. Получите формулы для вычисления мгновенного радиуса кривизны траектории движения центра масс шарика для начальной точки O и в точке максимального подъема B .

4. Докажите, что при постоянном значении модуля начальной скорости существуют две траектории (навесная и настильная), имеющие одинаковые значения координаты x при $y = 0$. Докажите, что в этом случае имеет место соотношение: $\alpha'_0 = 90 - \alpha_0$, где α'_0 и α_0 - углы наклона касательной в точке O к оси x для настильной и навесной траекторий движения, соответственно.

5. Получите формулу для ускорения движения центра масс шарика при скатывании его по наклонной плоскости, используя закон сохранения энергии. Объясните, почему при этом работа силы трения сцепления не учитывается.

6. Влияет ли сила трения качения на полученные вами результаты? Ответ обоснуйте, проделав необходимые расчеты.

7. Вычислите момент инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

8. Получите формулы для вычисления относительных ошибок косвенных измерений радиуса кривизны траектории и момента инерции шарика.